



Laboratoire
Louis Lions

Jacques-



Université Pierre et Ma-
rie Curie

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques appliquées

présentée par

Ange B. TOULOUGOUSSOU

Méthodes de sous-domaines pour le système de Stokes

dirigée par François-Xavier ROUX

Soutenue le 19 Décembre 2014 devant le jury composé de :

Daniel RIXEN	Technische Universität München	Rapporteur
Frédéric MAGOULÈS	Ecole Centrale des Arts et Manufactures	Rapporteur
Frédéric HECHT	Université Pierre et Marie Curie	Examineur
Caroline JAPHET	Université Paris 13	Examinatrice
Pierre GOSSELET	Ecole normale supérieure de Cachan	Examineur
François-Xavier ROUX	Université Pierre et Marie Curie	Directeur

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire Jacques-Louis Lions
Boîte courrier 187
75252 Paris Cedex 05 France

Université Pierre et Marie Curie
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
Boite courrier 290 75252 Paris Cedex
05

Table des matières

Introduction	7
1 Modèle Mathématique	9
1.1 Introduction	9
1.2 Le système de Stokes	11
1.3 Conclusion	14
2 Méthodes de résolution des problèmes de point-selle	15
2.1 Introduction	15
2.2 Les méthodes découplées	16
2.3 Les solveurs couplés directs	17
2.4 Les préconditionneurs	19
2.5 Conclusion	19
3 Généralité sur les méthodes de décomposition de domaine	21
3.1 Introduction	21
3.2 Les méthodes de Schwarz	22
3.3 Les méthodes du complément de Schur	24
3.4 Conclusion	31
4 La méthode FETI	33
4.1 Introduction	33
4.2 Dérivation de la méthode	33
4.3 Résolution du problème d'interface projeté	36
5 La méthode du complément de Schur primal et le préconditionneur BDD	39
5.1 Introduction	39
5.2 Calcul du produit matrice-vecteur avec le complément de Schur et son inverse	40
5.3 Le préconditionnement	41
6 Extension de la méthode BDD aux problèmes singuliers et à la structure d'interface définie par paire de sous-domaines	47
6.1 Introduction	47
6.2 BDD pour les problèmes semi-définis positifs	48
6.3 Extension de BDD aux interfaces définies par intersection de paire de sous-domaines	52
6.4 conclusion	55

7	Combinaison de la méthode FETI et de la méthode BDD pour la résolution de stokes avec la pression continue aux interfaces	57
7.1	Introduction	57
7.2	La méthode dual-primal FETI	58
7.3	Le système de Stokes	61
7.4	Présentation de la méthode du complément de Schur hybride pour l'équation de Stokes	62
7.5	La méthode du gradient conjugué préconditionné projeté pour la résolution du problème d'interface hybride	74
7.6	Analyse théorique de la méthode du complément de Schur hybride préconditionnée	81
7.7	conclusion	89
8	Mise en oeuvre pratique de la méthode hybride	91
8.1	Introduction	91
8.2	Présentation de la méthode dual-primal	91
8.3	Prise en compte d'éventuel noyau global	93
8.4	Résolution par gradient conjugué	94
8.5	conclusion	100
9	Applications numériques	101
10	Conclusion et perspectives	105
	Bibliographie	109

Introduction

La robustesse et l'extensibilité de FETI et BDD conçues pour les problèmes d'élasticité linéaire ont suscité le développement de plusieurs variantes et leur extension à plusieurs types de problèmes. L'application de FETI et BDD à Stokes est souvent restreinte à une discrétisation où la pression est discontinue. L'avantage de ce choix est de se ramener à un système défini positif soluble efficacement par la méthode du gradient conjugué [51, 60, 15, 43, 41]. On s'intéresse depuis peu à l'extension de FETI et BDD à la résolution du système linéaire issu de la discrétisation de Stokes où la pression est continue [75, 52, 42]. L'application de FETI ou de BDD à un tel système conduirait à un problème d'interface indéfini, le système de Stokes étant lui même indéfini. Le spectre de l'opérateur d'interface serait défavorable à la vitesse de convergence des méthodes de Krylov. Le caractère non positif du problème condensé rend plus problématique la convergence des méthodes de Krylov. L'objectif de cette thèse est de développer une méthode de décomposition de domaine efficace pour la résolution du système issu de la discrétisation de Stokes avec les éléments finis dont l'espace de pression est constitué d'éléments continus. En appliquant FETI à la vitesse et BDD à la pression nous obtenons un problème d'interface dont les inconnues sont homogènes à une force. Nous montrons que l'opérateur d'interface issu de cette stratégie est un assemblage d'opérateurs locaux symétriques semi-définis positifs. Le système d'interface peut être singulier du fait des redondances aux points multiples ou du type de conditions aux limites imposées à la vitesse [32, 65, 64, 17, 18]. Ces singularités sont de même nature que celles qu'on pourrait rencontrer avec FETI et BDD et pourront être résolues avec les mêmes outils. Le traitement de ces problèmes de singularité dans la méthode FETI est connu [32, 65, 17, 18]. Lorsque la matrice globale a un noyau non vide le problème grossier de FETI est singulier mais l'espace image du projecteur FETI est naturellement orthogonal au noyau du problème global. La redondance aux coins n'a pas de conséquence néfaste sur FETI mais elle est plutôt avantageuse pour sa vitesse de convergence dans la méthode FETI [32, 63]. Nous introduisons dans cette thèse une méthodologie qui permet de résoudre les problèmes de singularité dans la méthode BDD et qui permet une mise en oeuvre commune de FETI et BDD. Nous montrons que la singularité de la matrice globale due au type de conditions aux limites entraîne celle du complément de Schur qui lui est associé et rend le problème grossier de BDD irrégulier. Il est possible de reconstruire le noyau du complément de Schur global lorsqu'il est préconditionné par BDD. Le noyau éventuel du complément de Schur assemblé est la combinaison des noyaux des problèmes de Neumann locaux de la méthode BDD. Les coefficients de combinaison sont donnés par le noyau du problème grossier de BDD qui est une matrice creuse et de petite taille en général. Cette connaissance du noyau du complément de Schur nous permet de détecter son apparition lors de l'assemblage qui se fait après la résolution du problème grossier dans la méthode BDD. Elle permet par ailleurs la construction d'un projecteur qui maintient l'algorithme BDD dans l'espace où le complément de Schur assemblé est symétrique défini positif.

La méthodologie de mise en oeuvre commune pour FETI et BDD nécessite une définition unique de l'interface. Nous considérons comme interface l'intersection entre paire de sous-domaines. Cette définition engendre des redondances aux points multiples et peut faire diverger la méthode du complément de Schur primal. Nous introduisons une technique qui permet de supprimer cette redondance dans la méthode BDD. Le problème d'interface dans la méthode BDD est résolu par une méthode de gradient conjugué qui repose essentiellement sur les calculs de produits scalaires et des produits matrices-vecteurs. Le calcul du produit dans notre stratégie se fait entre deux facteurs dont l'un est assemblé et l'autre non assemblé. Les vecteurs assemblés sont systématiquement masqués par l'annulation des termes répétitifs [32].

Le système d'interface que nous obtenons en combinant FETI et BDD est analogue à celui de la méthode FETI et nous le résolvons de manière similaire par une méthode du gradient conjugué préconditionné projeté [32]. Cette méthode contient donc deux projecteurs dont l'un utilise les corps rigides des sous-domaines flottants comme dans la méthode FETI et agit uniquement sur les multiplicateurs de Lagrange. Le deuxième projecteur est construit à partir des constantes locales de pression. Il intervient pendant le préconditionnement comme dans la méthode BDD et s'applique uniquement à la pression. Ce découplage des deux projecteurs permet de conserver la structure creuse des matrices grossières de FETI et BDD qui sont de plus de petite taille.

Nous trouvons que la forme matricielle du préconditionneur est identique à celle de BDD appliquée aux problèmes elliptiques. Cette similitude permet une majoration analogue du nombre de conditionnement à partir de laquelle on pourrait déduire l'extensibilité théorique de la méthode que nous introduisons. Les résultats numériques montrent son efficacité et son extensibilité.

Nous allons présenter dans le chapitre 1 le modèle mathématique sur lequel nous allons consacrer notre étude. Nous allons ensuite indiquer quelques méthodes de discrétisation qui lui sont généralement appliquées et un aperçu des méthodes de résolution du système linéaire résultant dans le chapitre 2. L'état de la méthode de décomposition de domaine sera l'objet du chapitre 3. Nous allons présenter en détail la méthode FETI et la méthode BDD qui sont à la base des travaux de cette thèse dans le chapitre 4 et le chapitre 5 respectivement. La méthode BDD sera étendue à la résolution des problèmes symétriques semi-définis positifs et à l'usage de l'interface définie par l'intersection de paire de sous-domaines dans le chapitre 6. Le chapitre 7 est le coeur de cette thèse où nous développons une méthode de décomposition de domaine hybride à FETI et à BDD pour résoudre Stokes discrétisé avec la pression continue. L'implémentation de la méthode du gradient conjugué préconditionné appliquée à la méthode hybride que nous présentons dans le chapitre 8 ne montre aucune difficulté supplémentaire en comparaison avec FETI et BDD. Les tests numériques que nous effectuons dans le chapitre 9 démontrent la robustesse de la méthode hybride par rapport à la finesse du maillage et par rapport au nombre de sous-domaines. Nous envisagerons dans la perspective des évolutions et l'application des résultats de cette thèse à la diversité des disciplines scientifiques où interviennent les problèmes de point-selle.

Les travaux de cette thèse ont permis d'étendre BDD à la résolution de problèmes semi-définis positifs. Ils ont permis l'utilisation de l'interface définie par l'intersection de paire sous-domaines dans la méthode BDD. La combinaison de FETI et BDD appliquée au système de Stokes discrétisé avec la pression continue conduit à un problème d'interface symétrique semi-défini positif adapté à la méthode du gradient conjugué. Sa proximité théorique et numérique avec FETI et BDD ouvre des perspectives d'améliorations qui pourront s'appuyer sur le développement de FETI et BDD.

Chapitre 1

Modèle Mathématique

1.1 Introduction

Nous nous intéressons à l'analyse d'écoulements des fluides incompressibles à vitesse faible dans un espace de dimension d . Les fluides sont les substances dont la structure moléculaire ne résiste pas à l'action des forces extérieures [33]. ils sont souvent considérés comme une substance continue dont la dynamique est décrite par les lois physiques de conservation, notamment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. De ces lois découlent les équations aux dérivées partielles utiles à l'analyse mathématique et numérique d'écoulements de fluides.

1.1.1 Équations de Navier-Stokes

L'écoulement des fluides dans l'espace et dans le temps est régi par les équations de Navier-Stokes. La littérature sur ce système est abondante et la présentation que nous faisons est tirée de [3].

Conservation de la masse

Considérons une surface fermée A fixée relativement aux axes de coordonnées et qui englobe un volume V entièrement occupé par le fluide. Si ρ est la densité du fluide dans la position x et au temps t , la masse du fluide englobé par la surface est à tout instant $\int \rho dV$ et le taux net avec lequel la masse sort au travers de la surface est $\int \rho u \cdot n dA$. dV et dA sont respectivement les éléments du volume englobé et l'aire de la surface l'entourant ayant pour vecteur normal extérieur $n = (n_1, \dots, n_d)$ et $u = (u_1, \dots, u_d)$ la vitesse du fluide. En absence de termes sources la masse du fluide se conserve et nous avons

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \rho u \cdot n dA. \quad (1.1)$$

La différenciation sous le signe somme et le théorème de la divergence transforme l'équation (1.1) en :

$$\int \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right\} dV = 0. \quad (1.2)$$

La relation (1.2) est valable pour tous choix de volume V entièrement occupé par le fluide et n'est possible que si le terme sous le signe somme est identiquement nul partout dans le fluide. On obtient finalement l'équation de conservation de la masse en tous points du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (1.3)$$

On peut développer le terme de la divergence de l'équation (1.3) pour en obtenir la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot u = 0 \quad (1.4)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla.$$

On dit qu'un fluide est incompressible quand la variation de la pression n'affecte pas la densité d'un élément du fluide. La conduction moléculaire de chaleur peut aussi modifier la densité du fluide dans un élément de masse. On admet néanmoins dans plusieurs cas que la densité de chaque élément du fluide reste constante [3]. Ainsi, le taux de variation de ρ suivant le mouvement est nul,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

La conservation de la masse (1.4) prend alors la forme simplifiée

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (1.5)$$

L'équation du mouvement

L'équation du mouvement pour un fluide est une relation d'égalité entre le taux de variation de la quantité de mouvement d'une portion du fluide et la somme des forces surfaciques ou volumiques qui lui sont appliquées. Pour un fluide de volume τ entouré d'une surface matérielle A , la quantité de mouvement est $\int u \rho d\tau$ et son taux de variation est

$$\int \frac{Du}{Dt} \rho d\tau.$$

Nous noterons la force volumique par unité de masse du fluide par $F = (F_1, \dots, F_d)$ de façon que la force volumique totale agissant sur la portion du fluide considérée est

$$\int F \rho d\tau.$$

La i^{eme} composante de la force surfacique appliquée au travers d'un élément de surface d'aire δA et dont le vecteur normal extérieur est n peut être représentée par $\sigma_{ij} n_j \delta A$, où

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(u), \quad D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

p est la pression, μ est la viscosité et δ_{ij} le symbole de Kronecker. La matière environnant la portion du fluide exerce sur elle la force surfacique totale

$$\int \sigma_{ij} n_j dA = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} d\tau.$$

La conservation de la quantité de mouvement pour la portion du fluide s'exprime alors par la relation

$$\int \frac{Du_i}{Dt} \rho d\tau = \int \rho F_i d\tau + \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} d\tau. \quad (1.6)$$

L'intégration (1.6) est prise pour tous choix du volume matériel τ et n'est possible que si

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} \quad (1.7)$$

en tous points du fluide.

1.2 Le système de Stokes

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (1.5) et (1.7) sont complexes à étudier et à résoudre du fait de la non linéarité et du couplage entre les inconnues. Il est difficile de prouver l'existence et l'unicité de la solution de Navier-Stokes. Dans la plupart des cas où une telle solution existe plusieurs termes de l'équation sont nulles. Pour d'autres écoulements, certains termes sont petits et peuvent être négligés. Cette simplification introduit évidemment une erreur. Les solutions analytiques de ces systèmes simplifiés ne sont pas connues et on a souvent recours aux méthodes numériques pour approcher ces solutions. L'effort de calcul est beaucoup moins important que pour le problème complet, ce qui justifie ces simplifications.

Quand la vitesse de l'écoulement est très faible, le fluide est très visqueux, ou les dimensions géométriques sont petites, les effets des termes de convection de l'équation de Navier-Stokes sont moins importants et peuvent être négligés [33]. Si de plus on suppose les propriétés du fluide constantes le système de Navier-Stokes se simplifie en équation de Stokes dont la résolution par les méthodes de sous-domaines est l'objet de cette thèse. On retrouve aussi le système de Stokes lors de la résolution de Navier-Stokes par une méthode de splitting d'opérateurs.

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

avec

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

1.2.1 Le système de Stokes sous forme mixte

Nous introduisons quelques espaces fonctionnels nécessaires à l'analyse mathématique du système de Stokes (1.8).

Notons $\mathbb{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $\mathbb{D}'(\Omega)$ son dual topologique. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et posons

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

Pour tout $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$, on définit $\partial^\alpha u$ dans $\mathbb{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

On définit l'espace de Sobolev :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq 1 \right\}$$

et on notera $H^{-1}(\Omega)$ son dual au sens du produit scalaire $L^2(\Omega)$.

L'existence d'une solution au système de Stokes (1.8) nécessite la prescription des conditions au bord du domaine. Nous considérons dans un premier temps les conditions au bord de Dirichlet.

Théorème 1.1. [36] *Soit Ω un domaine ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d avec un bord $\partial\Omega$ Lipschitz-continu. Étant donné $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)^d$ tels que*

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot n dS = 0,$$

il existe une unique paire $(u, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ solution des équations

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p &= f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Une formulation variationnelle du problème (1.8) est la suivante :
Trouver une paire $(u, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \\ b(u, q) &= 0 & \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

avec

$$a(u, v) = \nu (\nabla u, \nabla v), \quad b(v, q) = -(q, \nabla \cdot v).$$

Notons

$$j(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}(v, q) = j(v) - (q, \nabla \cdot v). \quad (1.12)$$

Le théorème suivant décrit le problème (1.9) comme un problème de point-selle [36]

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.1, la solution (u, p) du système (1.9) est caractérisée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, p) &= \min_{v \in H^1(\Omega)^d} \sup_{q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \mathcal{L}(v, q) \\ &= \max_{q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \inf_{v \in H^1(\Omega)^d} \mathcal{L}(v, q). \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2.2 Forme discrète du système de Stokes

La solution analytique du système de Stokes (1.9) est souvent inconnue. On peut néanmoins trouver une approximation de cette solution par les méthodes numériques. Cela nécessite l'écriture du système sous forme discrète obtenue par différentes méthodes de discrétisation telles que les méthodes de différence finie, les méthodes de volumes finis ou les méthodes d'éléments finis. Nous choisissons une discrétisation par la méthode des éléments finis et nous devons choisir les espaces de dimension finie dans lesquels seront cherchées les approximations de la vitesse et de la pression. Ces espaces devront être compatibles pour assurer l'existence d'une solution discrète. Cette condition de compatibilité aussi appelée condition inf-sup a été établie par [2] et [13].

Posons $V = H^1(\Omega)^d$ et $Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ des sous-espaces de dimension finie de V et Q respectivement. Nous pouvons approcher le problème (1.10) par le problème discret : Trouver la paire $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ telle que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) &= \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h, \\ (q_h, \nabla \cdot u_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (1.14)$$

Nous associons respectivement aux formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ les opérateurs $A_h \in \mathcal{L}(V_h, V_h')$ et $B_h \in \mathcal{L}(V_h, Q_h')$ définis par :

$$\begin{aligned} \langle A_h u_h, v_h \rangle &= a(u_h, v_h) & \forall v_h \in V_h, \forall u_h \in V_h, \\ \langle B_h v_h, q_h \rangle &= b(v_h, q_h) & \forall v_h \in V_h, \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

où V'_h et Q'_h sont respectivement les duals topologiques de V_h et Q_h et $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des formes linéaires de l'ensemble E vers l'ensemble F .

Le système (1.14) prend alors la forme du problème de point-selle suivant :

Trouver le couple $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tel que

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution approchée (1.14) et donne une estimation de l'erreur entre la solution continue et son approximation [11] :

Théorème 1.3. *Soit $(u, p) \in V \times Q$ solution de (1.10) et supposons que la condition inf-sup suivante est satisfaite (avec k_0 indépendante du paramètre de discrétisation h)*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h dx}{\|q_h\|_Q \|v_h\|_V} \geq k_0. \quad (1.16)$$

Alors il existe un unique couple $(u_h, v_h) \in V_h \times Q_h$ solution de (1.14) et l'estimation suivante est satisfaite

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \inf_{v_h \in V_h, q_h \in Q_h} \left\{ \|u - v_h\|_V + \|p - q_h\|_Q \right\}.$$

La condition inf-sup (1.16) impose une restriction dans le choix des espaces discrets où sont calculées la vitesse et la pression approchées. Nous donnons ci-après quelques couples d'espaces compatibles et appropriés pour la discrétisation du système de Stokes [11], [36] et [12].

1.2.3 Éléments finis mixtes stables pour le système de Stokes incompressibles

L'élément Mini

Une approximation de la vitesse et de la pression par les polynômes de même degré conduit à un problème mal posé. L'élément Mini consiste à enrichir l'espace de discrétisation de la vitesse avec une bulle située à l'isobarycentre de chaque élément du maillage et permet une approximation stable de la vitesse et de la pression avec les polynômes de même degré. L'élément Mini encore appelé P_1 bulle P_1 introduit par [1] est considéré comme l'élément fini mixte le moins coûteux qui satisfait à la condition de compatibilité (1.16). Étant donné un maillage, les espaces d'approximations de la vitesse et de la pression en dimension 2 d'espace sont respectivement

$$V_h = (P_1 \oplus B_3)^2 \cap V, \quad Q_h = P_1 \cap Q$$

où B_3 est l'espace de bulles cubiques. En dimension 3 d'espace la bulle est un polynôme quartique B_4 .

L'élément de Hood-Taylor

L'élément fini mixte le plus ancien et le plus populaire a été introduit par [70] et consiste à approcher la vitesse par les polynômes P_2 et la pression de façon continue par les polynômes P_1 . L'analyse de sa stabilité a été successivement faite dans [5] et [77] et son extension à des polynômes de plus hauts degrés a été réalisée dans [8] et [9].

L'élément fini mixte $P_2 - P_0$

On approche la vitesse en utilisant les polynômes de second degré continus par morceaux et la pression par des constantes par morceaux. C'est un couple qui satisfait la condition inf-sup mais la précision de l'approximation est polluée par la mauvaise approximation de la pression.

L'élément de Crouzex-Raviart

L'élément fini de Crouzex-Raviart a été introduit dans [19] pour améliorer la précision du couple $P_2 - P_0$ en enrichissant l'espace de vitesse avec une bulle. Les espaces d'approximation en dimension 2 d'espace sont

$$V_h = (P_2 \oplus B_3)^2 \cap V, \quad Q_h = P_0 \cap Q.$$

1.3 Conclusion

L'application qui nous intéresse est un problème de la mécanique des fluides régie par les équations de Navier-Stokes. L'analyse et la résolution de ces équations sont connues d'être difficiles et suscitent des simplifications. Le système de Stokes est l'une des plus populaires de ces simplifications et est un sujet de recherche active. On peut le discrétiser en utilisant des éléments finis mixtes. Les espaces de vitesse et de pression doivent être compatibles pour avoir un système linéaire bien posé. Les méthodes de résolution de ce système est le sujet du chapitre 2.

Chapitre 2

Méthodes de résolution des problèmes de point-selle

2.1 Introduction

Les systèmes linéaires de type point-selle découlent en général de la minimisation d'une quantité sous certaines contraintes et sont communs à plusieurs applications à travers le calcul scientifique et l'ingénierie. C'est un sujet actif de recherche qui s'intéresse à la résolution des problèmes de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où x est une variable d'état et y représente le multiplicateur de Lagrange qui impose la contrainte sous la forme faible. Les problèmes de la forme (2.1) apparaissent lors d'une discrétisation par éléments finis mixtes stabilisés des problèmes elliptiques du second ordre. La stabilisation est nécessaire lorsque la variable d'état et le multiplicateur de Lagrange appartiennent à des espaces d'éléments finis qui dérogent à la condition inf-sup (LBB) [4]. La discrétisation des équations de fluides ou solides quasi-incompressibles est une autre source de systèmes du type (2.1). L'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu des différentes méthodes de résolution du système indéfini (2.1) [4]. On distingue parmi les méthodes de résolution de problèmes de point-selle les méthodes couplées et les méthodes découplées. Les méthodes couplées cherchent simultanément les inconnues x, y du problème alors que les méthodes découplées les déterminent successivement l'une après l'autre. Ces méthodes sont combinées aux méthodes directes ou itératives lors de la résolution des problèmes de point-selle. Les méthodes découplées les plus représentatives sont la méthode du complément de Schur et la méthode de projection. La distinction entre les méthodes couplées, les méthodes découplées, les méthodes directes et les méthodes itératives lors de la résolution des problèmes de point-selle n'a pas lieu en pratique car ces méthodes sont en général combinées. Par exemple, lors d'une résolution itérative les préconditionneurs des méthodes couplées sont souvent découplés et peuvent être une méthode directe. Nous allons introduire une méthode itérative couplée pour la résolution du système (2.1) qui est une méthode de décomposition de domaine. Le préconditionneur associé est couplé et nous allons utiliser une méthode directe pour résoudre les problèmes locaux.

2.2 Les méthodes découplées

2.2.1 La méthode d'Uzawa

On considère la forme développée du système (2.1) en supposant que la matrice A est inversible :

$$Ax + B^T y = f, \quad (2.2)$$

$$Bx - Cy = g. \quad (2.3)$$

On peut éliminer l'inconnue x en résolvant l'équation (2.2) pour x puisque la matrice A est supposée inversible et injecter l'expression obtenue dans l'équation (2.3). La première étape de cette procédure permet d'écrire

$$x = A^{-1} (f - B^T y)$$

dont la substitution dans l'équation (2.3) conduit au système

$$-(BA^{-1}B^T + C)y = -BA^{-1}f + g. \quad (2.4)$$

Le système (2.4) peut être résolu par une méthode directe ou la méthode du gradient conjugué lorsque le complément de Schur $S = -(BA^{-1}B^T + C)$ est symétrique défini positif. La solution y de l'équation (2.4) permet de déduire l'inconnue x en résolvant le système

$$Ax = f - B^T y. \quad (2.5)$$

La méthode d'Uzawa est intéressante si le système (2.4) est de petite taille et si on peut efficacement résoudre l'équation (2.5). Cependant, le complément de Schur S est en général dense et très coûteux à assembler et à factoriser. Les instabilités numériques peuvent apparaître lors de son assemblage notamment lorsque le bloc A est mal conditionné. On peut avoir recours dans ce cas aux méthodes itératives pour lesquelles la formation explicite du complément de Schur n'est pas requise. On devra en revanche effectuer l'action du complément de Schur sur les vecteurs en résolvant un système linéaire et trouver un préconditionneur efficace pour accélérer la convergence. A cet effet on peut recourir aux méthodes de décomposition de domaine ou les méthodes multi-grilles lors du calcul des produits matrices-vecteurs avec la matrice A^{-1} qui consiste à résoudre un système linéaire de matrice A [61, 79, 76].

2.2.2 La méthode de projection

On suppose ici que $C = 0$ et $\ker(H) \cap \ker(B) = 0$ où H est la partie symétrique de A et $\ker(H)$ et $\ker(A)$ sont respectivement les noyaux de H et de A . On suppose aussi connaître une solution particulière \hat{x} de l'équation $Bx = g$ et une matrice Z telle que $\text{Im}(Z) = \text{Ker}(B)$.

L'ensemble de solutions de $Bx = g$ est de la forme $x = Zv + \hat{x}$. En remplaçant x par $Zv + \hat{x}$ dans l'équation (2.5) on obtient $A(Zv + \hat{x}) = f - B^T y$. En utilisant l'égalité $\text{Im}(Z) = \ker(B)$ qui est équivalente à $Z^T B^T = 0$ on peut déterminer l'inconnue auxiliaire v en résolvant le système :

$$Z^T A Z v = Z^T (f - A \hat{x}). \quad (2.6)$$

La solution v_* de (2.6) permet de déduire la solution x_* de (2.5) sous la forme $x_* = Zv_* + \hat{x}$ et de déterminer la solution y_* en résolvant le système

$$BB^T y = B(f - Ax_*). \quad (2.7)$$

2.3 Les solveurs couplés directs

Notons $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix}$ la matrice du système (2.1). Les méthodes directes pour la résolution du système (2.1) nécessitent souvent un pivotage numérique pour les raisons de stabilité. On cherchera une factorisation LDL^T de la matrice \mathcal{A} en l'écrivant sous la forme

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}^T \mathcal{L} \mathcal{D} \mathcal{L}^T \mathcal{Q}, \quad (2.8)$$

où \mathcal{Q} est une matrice de permutation, \mathcal{L} une matrice triangulaire inférieure, et \mathcal{D} une matrice diagonale par bloc avec des blocs de dimension 1 et 2.

2.3.1 Les méthodes itératives stationnaires

La stratégie des méthodes itératives stationnaires consiste à décomposer la matrice du système linéaire à résoudre et à se ramener à la recherche du point fixe d'un opérateur dépendant des données du système linéaire. On peut écrire la matrice \mathcal{A} du système linéaire (2.1) sous la forme : $\mathcal{A} = \mathcal{M} - \mathcal{N}$ où \mathcal{M} est une matrice inversible. On peut montrer que la solution du système (2.1) est le point fixe d'un processus itératif dont la matrice est de la forme $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}$. Ces méthodes sont faciles à implémenter, à analyser et ont été utilisées pendant longtemps comme solveurs. Elles suppriment efficacement les hautes fréquences de l'erreur entre les itérés et la solution du système linéaire mais détruisent difficilement les basses fréquences. Cette bonne performance par rapport aux hautes fréquences fait des méthodes itératives stationnaires des lisseurs classiques dans les méthodes multiniveaux. Les méthodes de Krylov font partie des techniques de résolution de systèmes linéaires activement étudiées. Leur vitesse de convergence dépend de la matrice de préconditionnement et un autre usage prépondérant des méthodes itératives stationnaires est d'accélérer la convergence des méthodes de Krylov. La matrice \mathcal{M} qui intervient dans la décomposition de la matrice \mathcal{A} joue souvent le rôle de préconditionneur dans les méthodes de Krylov.

2.3.2 Les méthodes de Arrow-Hurwicz et Uzawa

Ce sont des méthodes itératives qui peuvent être couplées en recherchant simultanément les approximations des inconnues x et y par un découpage de la matrice \mathcal{A} . On peut aussi les interpréter, par l'élimination de l'une des inconnues, comme des méthodes itératives pour le système du complément de Schur (2.4). Nous supposons que $C = 0$ pour simplifier la présentation. Etant données les valeurs initiales x_0 et y_0 , l'itération de la méthode de Uzawa se présente comme suit :

$$\begin{cases} Ax_{k+1} = f - B^T y_k, \\ y_{k+1} = y_k + \omega (Bx_{k+1} - g), \end{cases} \quad (2.9)$$

où ω est un paramètre de relaxation strictement positif. On peut aussi exprimer le schéma (2.9) sous la forme d'une itération de point fixe

$$\mathcal{P}u_{k+1} = \mathcal{Q}u_k + b,$$

avec

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -\frac{1}{\omega}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -B^T \\ 0 & -\frac{1}{\omega}I \end{pmatrix}, \quad u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

En éliminant x_{k+1} dans la première équation du système (2.9) et en reportant l'expression obtenue, la deuxième équation devient

$$y_{k+1} = y_k + \omega \left(BA^{-1}f - g - BA^{-1}B^T y_k \right). \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) montre que la méthode de Uzawa est équivalente à la méthode itérative de Richardson appliquée au système du complément de Schur

$$BA^{-1}B^T y = BA^{-1}f - g. \quad (2.11)$$

On peut interpréter la première équation du système (2.9) comme l'équation d'Euler-Lagrange associée à la minimisation de la fonctionnelle d'énergie

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T \left(f - B^T y_k \right).$$

Si on fait une itération dans la direction du gradient de $\varphi(x)$ avec un pas fixe β , on obtient la méthode de Arrow-Hurwicz :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \beta \left(f - A x_k - B^T y_k \right), \\ y_{k+1} = y_k + \omega \left(B x_{k+1} - g \right). \end{cases} \quad (2.12)$$

La convergence de la méthode de Uzawa et celle de Arrow-Hurwicz peuvent être améliorée par des préconditionneurs adéquats.

2.3.3 Les méthodes de pénalisation et de Lagrangien

Nous supposons la matrice A symétrique, semi-définie positive, B de rang maximal, $C = 0$ et le problème (2.1) bien posé. Le problème de point-selle (2.1) est équivalent au problème de minimisation sous contrainte :

$$\min \quad J(x) = \frac{1}{2}x^T A x - f^T x, \quad (2.13)$$

$$\text{avec } Bx = g. \quad (2.14)$$

On remarque que la solution x_\star du système (2.13)-(2.14) vérifie

$$x_\star = \lim_{r \rightarrow \infty} x(r),$$

où $x(r)$ est la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle \hat{J} donnée par

$$\hat{J}(x) = J(x) + \frac{r}{2} \|Bx - g\|_2^2.$$

Si on pose $y(r) = r(Bx(r) - g)$ on peut montrer que

$$\|x_\star - x(r)\|_2 = O(r^{-1}) \quad \text{et} \quad \|y_\star - y(r)\|_2 = O(r^{-1}) \quad \text{pour } r \text{ suffisamment grand.}$$

$x(r)$ et $y(r)$ sont donc des approximations des solutions du problème de point-selle (2.1) pour les valeurs de r assez grandes. La résolution du problème d'Euler-Lagrange associé à \hat{J} est en pratique très difficile pour les grandes valeurs de r . Une alternative qui permet d'éviter ces difficultés consiste à résoudre le problème de point-selle régularisé ci-dessous qui admet le même couple de solutions $(x(r), y(r))$

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \epsilon = r^{-1}. \quad (2.15)$$

Une autre possibilité est de combiner la méthode de pénalisation et la méthode du Lagrangien en introduisant le Lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}(x, y) = J(x) + (Bx - g)^T y + \frac{r}{2} \|Bx - g\|_2^2 \quad (2.16)$$

dont le système de point-selle associé est

$$\begin{pmatrix} A + rB^T B & B^T \\ B & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + rB^T g \\ g \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Le problème (2.17) est équivalent à (2.1) et sa résolution par la méthode de Uzawa conduit au couple de solutions du problème de point-selle initial.

2.4 Les préconditionneurs

Nous nous intéressons à la résolution de systèmes de grande taille qui nécessite l'usage des méthodes itératives. La répartition spectrale des systèmes de points-selle est défavorable à ces méthodes. Nous devons donc recourir aux préconditionneurs pour améliorer les propriétés spectrales de la matrice du système linéaire. La construction des préconditionneurs se fait en général de deux façons différentes [4] : Les techniques algébriques comme la factorisation incomplète, les inverses approchés et les méthodes multi-niveaux algébriques.

2.5 Conclusion

Les problèmes de point-selle sont courants en ingénierie et en recherche scientifique. Les méthodes de résolution existent mais l'hétérogénéité du spectre de la matrice est une source de difficultés. L'amélioration des méthodes existantes et la recherche de nouvelles méthodes de résolution est un défi qui retient encore beaucoup d'ingénieurs et de chercheurs [4].

Chapitre 3

Généralité sur les méthodes de décomposition de domaine

3.1 Introduction

Les modèles mathématiques issus de la modélisation des problèmes physiques sont souvent compliqués à analyser et à résoudre. Cette complexité peut être liée à la nature physique du problème ou la forme de sa géométrie. La taille des systèmes matricielles qui découlent de la discrétisation par une méthode numérique de telles équations aux dérivées partielles pose aussi le problème de stockage en mémoire et de la rapidité de résolution sur machines de calcul. Ces difficultés apparaissent en fonction des méthodes d'investigation et des ressources disponibles. Il est donc nécessaire de simplifier ces problèmes sans modifier leurs propriétés physiques et mathématiques afin de les résoudre efficacement compte tenu de l'état de l'art. Une méthode à laquelle on peut avoir recours est la méthode de décomposition de domaine initiée par [67]. La méthode de décomposition de domaine connaît un regain d'intérêts depuis les trois dernières décennies d'une part suite à la complexité de plus en plus accrue des modèles mathématiques. La modélisation de plus en plus réaliste des phénomènes physiques et l'exigence de précision contribuent à cette complexification. D'autre part, le développement des calculateurs parallèles de haute performance encourage la recherche sur les méthodes de décomposition de domaine dont l'une des motivations est la parallélisation et une bonne performance parallèle [68]. L'idée de la méthode de décomposition de domaine est de subdiviser une équation aux dérivées partielles en plus petits problèmes couplés par des conditions de continuité et qui sont posés sur des sous-domaines formant une partition du domaine original. Cette décomposition peut être faite au niveau du problème continu ou au niveau discret [71].

3.1.1 Le problème modèle

Considérons pour simplifier la résolution par la méthode des éléments finis du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle du problème (3.1) s'écrit : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

3.1.2 La discrétisation du problème modèle

Soit $\mathcal{T}_h = \cup K$ une triangulation de $\bar{\Omega}$. On définit le problème discret sur un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie noté X_{0h} . Le problème discret s'écrit : Trouver $u_h \in X_{0h}$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in X_{0h}. \quad (3.2)$$

Étant donnée $(w_k)_{k=1}^M$ une base de X_{0h} . Tout élément de X_{0h} se décompose de façon unique dans cette base et on a, en particulier, $u_h = \sum_{k=1}^M u_k w_k$. Le problème discret (3.2) devient : Trouver $u_h \in X_{0h}$ telle que

$$\sum_{k=1}^M u_k a(w_k, v_h) = f(v_h), \quad a(w_k, v_h) = \int_{\Omega} \nabla w_k \nabla v_h, \quad f(v_h) = \int_{\Omega} f v_h. \quad (3.3)$$

Le système (3.3) est vérifié si et seulement s'il est vérifié pour chaque fonction de base w_l . En prenant successivement les fonctions de base comme fonction test dans le système (3.3) on aboutit au problème suivant : Trouver $(u_k)_{1 \leq k \leq M}$ tel que

$$\sum_{k=1}^M u_k a(w_k, w_l) = f(w_l), \quad \forall 1 \leq l \leq M. \quad (3.4)$$

En appelant K la matrice définie par $K = (K_{ij}) = (a(w_i, w_j))$, en posant $u = (u_k)_{1 \leq k \leq M}$, $f = (f_k)_{1 \leq k \leq M} = (f(w_k))_{1 \leq k \leq M}$, le système (3.4) se réécrit sous la forme : Trouver $u \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$Ku = f. \quad (3.5)$$

On peut résoudre le système (3.5) par une méthode directe ou itérative. Cependant, la taille des problèmes issus d'applications réelles est souvent élevée et les méthodes directes nécessitent d'importantes ressources en mémoire et un coût en calcul non négligeable. En revanche, les méthodes itératives requièrent uniquement le calcul des produits matrices-vecteurs et peu de stockage en mémoire. Nous présentons ci-dessous une classe de méthodes itératives basées sur la décomposition du domaine considéré en sous-domaines. Nous supposons le domaine Ω décomposé en N_s sous-domaines tels que $\Omega = \cup_{s=1}^{N_s} \Omega^{(s)}$. Nous noterons les bords locaux $\Gamma^{(s)} = \partial\Omega^{(s)}$, l'intersection de deux sous-domaines $\Gamma^{(sq)} = \Gamma^{(s)} \cap \Gamma^{(q)}$ et l'interface global $\Gamma = \cup_{s=1}^{N_s} \Gamma^{(s)}$.

3.2 Les méthodes de Schwarz

La méthode de Schwarz alternée est une méthode itérative qui a été introduite par [67] pour construire des fonctions harmoniques sur des domaines irréguliers qui sont une réunion de domaines réguliers. Ses motivations étaient théoriques [59] et sa méthode appelée la méthode de Schwarz multiplicative n'était pas parallèle. L'apparition des calculateurs parallèles a provoqué un regain d'intérêts pour la méthode de Schwarz. Elle a fait l'objet de plusieurs études à la fois théorique et algébrique avec l'introduction de nombreuses variantes durant les dernières décennies [35].

3.2.1 La méthode de Schwarz multiplicative

La description de la méthode de Schwarz alternée que nous présentons est tirée de [68] et [59]. On considère un découpage avec recouvrement du domaine $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ sur lequel on veut résoudre le problème (3.1). On notera $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ le fermé de Ω , $\Gamma^{(s)}$, $s = 1, 2$ la partie du bord de $\Omega^{(s)}$ qui est intérieure à Ω . L'autre partie du bord du

sous-domaine $\Omega^{(s)}$ sera notée $\partial\Omega^{(s)} \setminus \Gamma^{(s)}$. Étant données $u^{(s)n}, u^{(s)n}|_{\Gamma^{(q)}}$ respectivement les solutions approchées de (3.1) dans $\Omega^{(s)}$ après n itérations, et sa restriction à $\Gamma^{(q)}, s \neq q$. L'algorithme de Schwarz pour résoudre l'équation (3.1) est le suivant :

Algorithme de Schwarz multiplicatif alterné

Étant donné $u^{(2)0}$

1. Pour $n = 0, \dots$, jusqu'à convergence,
2. Résoudre le problème de Poisson suivant pour $u^{(1)n}$:

$$\begin{cases} -\Delta u^{(1)n} = f & \text{dans } \Omega^{(1)}, \\ u^{(1)n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^{(1)} \setminus \Gamma^{(1)}, \\ u^{(1)n} = u^{(2)n-1}|_{\Gamma^{(1)}} & \text{sur } \Gamma^{(1)} \end{cases} \quad (3.6)$$

3. Résoudre le problème de Poisson suivant pour $u^{(2)n}$:

$$\begin{cases} -\Delta u^{(2)n} = f & \text{dans } \Omega^{(2)}, \\ u^{(2)n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^{(2)} \setminus \Gamma^{(2)}, \\ u^{(2)n} = u^{(1)n}|_{\Gamma^{(2)}} & \text{sur } \Gamma^{(2)}. \end{cases} \quad (3.7)$$

La méthode de Schwarz multiplicative que nous venons de présenter est séquentielle au sens où elle nécessite la résolution du problème considéré sur l'un des sous-domaines avant l'autre [59]. L'algorithme de Schwarz additif [22], [68] permet une résolution simultanée des sous-problèmes et est naturellement parallèle.

3.2.2 La méthode de Schwarz additive

L'algorithme de Schwarz additif introduit une partition de l'unité $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(2)}$ subordonnée aux sous-domaines avec recouvrement $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ et définie par :

$$\begin{cases} \chi^{(s)} \geq 0 & \text{dans } \Omega^{(s)}, \\ \chi^{(s)} = 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega^{(s)}}, \\ \chi^{(1)} + \chi^{(2)} = 1 & \text{dans } \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Algorithme de Schwarz additif alterné

Étant donnés $u^{(1)0}$ et $u^{(2)0}$

1. Pour $n = 0, \dots$, jusqu'à convergence,
2. Résoudre simultanément les problèmes de Poisson suivants pour $u^{(1)n}$ et $u^{(2)n}$:

$$\begin{cases} -\Delta u^{(s)n} = f & \text{dans } \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2; \\ u^{(s)n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^{(s)} \setminus \Gamma^{(s)}, \quad s = 1, 2 \\ u^{(s)n} = \chi^{(1)} u^{(1)n-1}|_{\Gamma^{(1)}} + \chi^{(2)} u^{(2)n-1}|_{\Gamma^{(2)}} & \text{sur } \Gamma^{(s)}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous avons présenté les méthodes de Schwarz alternées dans le cas d'une décomposition en deux sous-domaines uniquement pour simplifier l'exposé. Ces méthodes peuvent être généralisées à une décomposition quelconque du domaine original. Il est alors nécessaire d'ajouter aux algorithmes un problème qui couple tous les sous-domaines afin de propager

globalement l'information entre les sous-domaines et ainsi accélérer la convergence de ces méthodes itératives. Les méthodes de Schwarz précédentes nécessitent le recouvrement des sous-domaines et on peut montrer que leurs taux de convergence dépendent de la taille du recouvrement [71]. La modification de l'algorithme de Schwarz apportée par [53] permet une décomposition en sous-domaines non-recouvrants. Elle consiste à résoudre des problèmes locaux avec les conditions de Fourier sur l'interface contrairement aux méthodes de Schwarz précédentes qui imposent les conditions de Dirichlet sur les bords artificiels des sous-domaines.

3.2.3 La méthode de décomposition avec les conditions de transmission de Fourier

On suppose ici que l'intersection des sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ est vide et on appelle Γ leur frontière commune. Cet algorithme qui s'applique à plusieurs types de problèmes se présente comme suit : Étant donnés $u^{(1)0}$ et $u^{(2)0}$

1. Pour $n = 0, \dots$, jusqu'à convergence,
2. Résoudre simultanément les problèmes de Poisson suivants pour $u^{(1)n}$ et $u^{(2)n}$:

$$\begin{cases} -\Delta u^{(s)n} = f & \text{dans } \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2; \\ u^{(s)n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^{(s)} \setminus \Gamma^{(s)}, \quad s = 1, 2 \\ \frac{\partial u^{(s)n}}{\partial n^{(s)}} + \alpha^{(s)} u^{(s)n} = \frac{\partial u^{(q)n-1}}{\partial n^{(s)}} + \alpha^{(s)} u^{(q)n-1} & \text{sur } \Gamma, s \neq q. \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous venons de présenter quelques méthodes de décomposition avec des sous-domaines recouvrants. Nous allons introduire une famille de méthodes de décomposition de domaine dont les sous-domaines sont disjoints et qu'on appelle les méthodes de sous-structuration [68], [62], [59], [71]. On peut combiner les méthodes de sous-structuration avec les algorithmes directs de résolution de systèmes linéaires en calculant explicitement les compléments de Schur et en les factorisant [68]. Cette stratégie est possible pour les problèmes de petites tailles. En revanche, les méthodes itératives sont plus adaptées à la résolution des problèmes de grandes dimensions et on pourra les associer aux méthodes de résolution de grands systèmes par sous-structuration. Nous nous intéressons dans cette thèse aux méthodes itératives de sous-structuration qui peuvent être primales ou duales [71]. Les méthodes de sous-structuration primales portent leurs itérations sur les degrés de liberté situés aux interfaces des sous-structures alors que les itérés des méthodes de sous-structuration duales sont les multiplicateurs de Lagrange introduits pour assurer la continuité faible des degrés de liberté au travers des interfaces.

3.3 Les méthodes du complément de Schur

Nous considérons dans cette introduction la résolution par une méthode de décomposition en deux sous-problèmes du système linéaire

$$Ku = f. \quad (3.11)$$

Nous noterons les degrés de liberté internes à chaque sous-problème $\{u_i^{(s)}\}_{s=1,2}$ et ceux qui sont à l'interface seront notés $\{u_\Gamma^{(s)}\}_{s=1,2}$. Les matrices de rigidité associées à chaque sous-problème et la matrice globale s'écrivent respectivement

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{\Gamma i}^{(s)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & K_{i\Gamma}^{(1)} \\ 0 & K_{ii}^{(2)} & K_{i\Gamma}^{(2)} \\ K_{\Gamma i}^{(1)} & K_{\Gamma i}^{(2)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + K_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Les solutions des problèmes locaux associés aux matrices $K^{(s)}$ doivent satisfaire la condition de continuité et la condition d'équilibre à l'interface pour être les restrictions de la solution du système (3.11) dans chaque sous-domaine. Ces conditions de compatibilité s'écrivent respectivement :

$$u_{\Gamma}^{(1)} - u_{\Gamma}^{(2)} = 0 \quad (3.13)$$

$$K_{\Gamma i}^{(1)} u^{(1)} + K_{\Gamma i}^{(2)} u^{(2)} + (K_{\Gamma \Gamma}^{(1)} + K_{\Gamma \Gamma}^{(2)}) u_{\Gamma} = f_{\Gamma}. \quad (3.14)$$

3.3.1 La méthode itérative de sous-structuration primale : La méthode du complément de Schur

La matrice K peut être factorisée sous la forme

$$K = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ K_{\Gamma i}^{(1)} K_{ii}^{(1)-1} & K_{\Gamma i}^{(2)} K_{ii}^{(2)-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S^{(1)} + S^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & K_{ii}^{(1)-1} K_{i\Gamma}^{(1)} \\ 0 & I & K_{ii}^{(2)-1} K_{i\Gamma}^{(2)} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Les compléments de Schur sont en général des matrices denses et sont définis par

$$S^{(s)} = K_{\Gamma \Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)}.$$

On peut réécrire le système linéaire (3.11) sous la forme

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^{(2)} & 0 \\ K_{\Gamma i}^{(1)} & K_{\Gamma i}^{(2)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & K_{ii}^{(1)-1} K_{i\Gamma}^{(1)} \\ 0 & I & K_{ii}^{(2)-1} K_{i\Gamma}^{(2)} \\ 0 & 0 & S^{(1)} + S^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ f_i^{(2)} \\ f_{\Gamma} \end{pmatrix}.$$

En effectuant une résolution en descente/remontée par bloc on obtient

$$\begin{pmatrix} I & 0 & K_{ii}^{(1)-1} K_{i\Gamma}^{(1)} \\ 0 & I & K_{ii}^{(2)-1} K_{i\Gamma}^{(2)} \\ 0 & 0 & S^{(1)} + S^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -K_{\Gamma i}^{(1)} & -K_{\Gamma i}^{(2)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)-1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^{(2)-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ f_i^{(2)} \\ f_{\Gamma} \end{pmatrix}.$$

On devra donc résoudre le problème du complément de Schur

$$(S^{(1)} + S^{(2)}) u_{\Gamma} = f_{\Gamma} - K_{\Gamma i}^{(1)} K_{ii}^{(1)-1} f_i^{(1)} - K_{\Gamma i}^{(2)} K_{ii}^{(2)-1} f_i^{(2)} \equiv g. \quad (3.15)$$

Nous avons choisi de résoudre le système (3.15) par une méthode itérative qui nécessite un préconditionneur efficace afin d'accélérer la convergence.

Le préconditionneur Neumann-Dirichlet

L'algorithme Neumann-Dirichlet utilise comme préconditionneur du complément de Schur global $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ le complément de Schur local $S^{(1)}$. On résout par une méthode de Krylov le système

$$(S^{(1)} + S^{(2)}) u_{\Gamma} = (S^{(1)} + S^{(2)}) S^{(1)-1} w_{\Gamma} = (I + S^{(2)} S^{(1)-1}) w_{\Gamma} = g. \quad (3.16)$$

nous verrons que l'action de $S^{(1)-1}$ sur un vecteur se fait par la résolution d'un problème de Neumann sans former explicitement la matrice $S^{(1)}$. L'application du complément de Schur $S^{(2)}$ sur un vecteur se fera quant à elle par la résolution d'un problème de Dirichlet.

Le préconditionneur Neumann-Neumann

Dans la méthode Neumann-Neumann, le préconditionneur est donné par $S^{(1)^{-1}} + S^{(2)^{-1}}$. A chaque itération, on doit résoudre deux problèmes de Dirichlet correspondants aux actions des compléments de Schur locaux sur un vecteur et deux problèmes de Neumann qui correspondent à l'application de leurs inverses.

La méthode qui a conduit au système (3.15) peut être généralisée à un nombre quelconque de sous-problèmes. On pourra de même généraliser la méthode Neumann-Neumann à un découpage arbitraire du problème initial en plusieurs sous-problèmes. Il est alors nécessaire dans ce cas d'inclure dans l'algorithme un procédé de propagation globale d'information entre les sous-problèmes afin de préserver la rapidité de sa convergence. Une telle stratégie a conduit à la méthode Balancing domain decomposition method (BDD) que nous allons détailler dans les prochains chapitres.

3.3.2 Les méthodes itératives de sous-structuration duales : FETI et ses variantes

La méthode FETI a été introduite par [31], [32] pour résoudre le système linéaire issu d'une discrétisation par éléments finis du système de l'élasticité linéaire. C'est une méthode algébrique qui s'adapte par conséquent à plusieurs autres types de problèmes. Son succès a suscité l'introduction de plusieurs variantes dont certaines seront présentées dans ce chapitre.

FETI avec un multiplicateur de Lagrange par interface

Nous considérons le cas d'une décomposition du problème (3.11) en deux sous-problèmes dont un est mal posé. Nous supposons ainsi que la matrice $K^{(1)}$ est symétrique définie positive et la matrice $K^{(2)}$ symétrique semi-définie positive [31]. On introduit les opérateurs de trace signés $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$. L'application de $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ à un vecteur ou une matrice consiste à en extraire et à signer les composantes correspondant à l'interface du sous-domaine $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ respectivement [32]. On suppose ici que $T^{(1)}$ est une matrice d'éléments $\{0, 1\}$ et que $T^{(2)}$ est une matrice d'éléments $\{0, -1\}$. On introduit un multiplicateur de Lagrange à l'interface pour assurer la continuité faible des déplacements. Le système linéaire résultant de cette méthodologie est équivalente au système (3.11) et s'écrit :

$$K^{(1)}u^{(1)} = f^{(1)} - T^{(1)^T}\lambda, \quad (3.17)$$

$$K^{(2)}u^{(2)} = f^{(2)} - T^{(2)^T}\lambda, \quad (3.18)$$

$$T^{(1)}u^{(1)} + T^{(2)}u^{(2)} = 0. \quad (3.19)$$

Puisque la matrice de rigidité locale $K^{(1)}$ est inversible, on peut éliminer le déplacement local $u^{(1)}$ dans l'équation (3.17) pour obtenir

$$u^{(1)} = K^{(1)^{-1}} \left(f^{(1)} - T^{(1)^T}\lambda \right). \quad (3.20)$$

Par contre, en supposant la matrice $K^{(2)}$ semi-définie positive, nous avons supposé que le sous-problème correspondant admet la condition de Neumann sur son bord. Le noyau de l'opérateur $K^{(2)}$ est non vide et nous noterons sa base $R^{(2)}$. Le problème (3.18) n'admet de solution que si le second membre vérifie la condition de compatibilité

$$R^{(2)^T} \left(f^{(2)} - T^{(2)^T}\lambda \right) = 0. \quad (3.21)$$

La condition (3.21) lorsqu'elle est vérifiée assure l'existence d'une famille de solutions de l'équation (3.18) et nous pouvons éliminer le déplacement $u^{(2)}$ en utilisant un inverse généralisé de $K^{(2)}$. L'élimination de $u^{(2)}$ dans l'équation (3.18) conduit à

$$u^{(2)} = K^{(2)+} \left(f^{(2)} - T^{(2)T} \lambda \right) + R^{(2)} \alpha. \quad (3.22)$$

où α est le coefficient de combinaison des éléments du noyau de $K^{(2)}$. On peut substituer les valeurs de $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ obtenues en (3.20) et (3.22) dans l'équation (3.19) pour obtenir

$$\left(T^{(1)} K^{(1)-1} T^{(1)T} + T^{(2)} K^{(2)+} T^{(2)T} \right) \lambda - T^{(2)} R^{(2)} \alpha = T^{(1)} K^{(1)-1} f^{(1)} + T^{(2)} K^{(2)+} f^{(2)}. \quad (3.23)$$

On peut réduire les équations (3.20), (3.22) et (3.23) au système :

$$\begin{pmatrix} F_I & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -e \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

avec

$$F_I = T^{(1)} K^{(1)-1} T^{(1)T} + T^{(2)} K^{(2)+} T^{(2)T}, \quad G_I = T^{(2)} R^{(2)}, \\ d = T^{(1)} K^{(1)-1} f^{(1)} + T^{(2)} K^{(2)+} f^{(2)}, \quad e = \left(f^{(2)T} R^{(2)} \right)^T.$$

Le système (3.24) est un problème sous contrainte et on peut montrer que la matrice F_I est symétrique définie positive. On peut donc le résoudre par une méthode de gradient conjugué projeté [32]. Nous donnerons plus de détails dans le chapitre 4.

FETI avec deux multiplicateurs de Lagrange par interface

L'extension de la méthode FETI aux problèmes indéfinis ou complexes conduit à remplacer les multiplicateurs de Lagrange qui représentent aussi les conditions de Neumann aux bords des sous-domaines par les multiplicateurs de Lagrange qui sont associés aux conditions de Fourier aux bords des sous-domaines [29]. Ces variantes de FETI peuvent utiliser un ou deux multiplicateurs de Lagrange par interface et leurs problèmes locaux sont réguliers. Nous présentons la variante à deux multiplicateurs de Lagrange et nous nous référons à [29] pour plus de détails. Le problème à résoudre est de trouver u la solution du problème modèle (3.11)

$$Ku = f.$$

Nous avons vu en (3.12) que la matrice K et les données du problème peuvent se décomposer sous la forme

$$K = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & K_{i\Gamma}^{(1)} \\ 0 & K_{ii}^{(2)} & K_{i\Gamma}^{(2)} \\ K_{\Gamma i}^{(1)} & K_{\Gamma i}^{(2)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + K_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ f_i^{(2)} \\ f_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

avec

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{\Gamma i}^{(s)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2; \quad f_\Gamma = f_\Gamma^{(1)} + f_\Gamma^{(2)}.$$

La méthode FETI avec deux multiplicateurs de Lagrange consiste à introduire deux conditions de Fourier indépendantes sur l'interface Γ . Les problèmes locaux prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{\Gamma i}^{(s)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(s)} \\ u_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(s)} \\ f_\Gamma^{(s)} + \lambda_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}; \quad s = 1, 2. \quad (3.26)$$

Pour être les restrictions aux sous-domaines de la solution du problème global (3.11), les solutions des problèmes (3.26) doivent satisfaire la condition de continuité et d'équilibre à l'interface :

$$u_{\Gamma}^{(1)} - u_{\Gamma}^{(2)} = 0 \quad (3.27)$$

$$K_{\Gamma i}^{(1)} u^{(1)} + K_{\Gamma i}^{(2)} u^{(2)} + K_{\Gamma\Gamma} u_{\Gamma} = f_{\Gamma}. \quad (3.28)$$

Étant données les décompositions de $K_{\Gamma\Gamma}$ et de f_{Γ} , on peut réécrire la condition d'équilibre (3.28) comme :

$$K_{\Gamma i}^{(1)} u^{(1)} + K_{\Gamma i}^{(2)} u^{(2)} + K_{\Gamma\Gamma}^{(1)} u_{\Gamma}^{(1)} + K_{\Gamma\Gamma}^{(2)} u_{\Gamma}^{(2)} = f_{\Gamma}^{(1)} + f_{\Gamma}^{(2)}. \quad (3.29)$$

Puisque la dernière ligne du problème local de Fourier (3.26) donne

$$K_{\Gamma i}^{(s)} u^{(s)} + K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} u_{\Gamma}^{(s)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} u_{\Gamma}^{(s)} = f_{\Gamma}^{(s)} + \lambda_{\Gamma}^{(s)}, \quad s = 1, 2; \quad (3.30)$$

on peut réécrire l'équation (3.29) comme :

$$A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} u_{\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} u_{\Gamma}^{(2)} = \lambda_{\Gamma}^{(1)} + \lambda_{\Gamma}^{(2)}. \quad (3.31)$$

En combinant la condition de continuité (3.13) et celle d'équilibre (3.31) on obtient :

$$A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} u_{\Gamma}^{(2)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} u_{\Gamma}^{(2)} = \lambda_{\Gamma}^{(1)} + \lambda_{\Gamma}^{(2)}, \quad (3.32)$$

$$A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} u_{\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} u_{\Gamma}^{(1)} = \lambda_{\Gamma}^{(1)} + \lambda_{\Gamma}^{(2)}. \quad (3.33)$$

Nous obtenons la relation entre les traces des solutions locales de l'équation (3.26) et les flux $\lambda_{\Gamma}^{(s)}$ en éliminant les inconnues internes de la première ligne de (3.26) puis en injectant les expressions obtenues dans sa deuxième ligne. Cette relation s'écrit :

$$\left(K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma} + A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \right) u_{\Gamma}^{(s)} = \lambda_{\Gamma}^{(s)} + f_{\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f^{(s)}, \quad s = 1, 2. \quad (3.34)$$

Posons $S^{(s)} = K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}$, le complément de Schur local et $c_{\Gamma}^{(s)} = f_{\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f^{(s)}$, le second membre condensé. En remplaçant les valeurs de $u_{\Gamma}^{(1)}$ et $u_{\Gamma}^{(2)}$ tirées des relations (3.34) dans les équations (3.32) et (3.33), on obtient le système d'interface associé à la méthode FETI-2LM :

$$\begin{pmatrix} I & I - \left(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \right) \left(S^{(2)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \right)^{-1} \\ I - \left(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \right) \left(S^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} \right)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\Gamma}^{(1)} \\ \lambda_{\Gamma}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(S^{(2)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \right)^{-1} c_{\Gamma}^{(2)} \\ \left(S^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} \right)^{-1} c_{\Gamma}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Le système (3.35) est résolu par une méthode de Krylov avec un choix approprié des opérateurs $\{A_{\Gamma\Gamma}^{(s)}\}_{s=1,2}$ qui doivent garantir la rapidité de convergence de la méthode et préserver la structure creuse des matrices locales.

FETI à deux niveaux

Une propriété essentielle des méthodes de décomposition de domaines efficace est l'extensibilité : La vitesse de convergence de la méthode ne doit pas se détériorer avec l'augmentation du nombre de sous-domaines. Une extension de FETI aux problèmes biharmoniques qui préserve cette extensibilité est la méthode FETI-2. Elle consiste à imposer exactement la condition de continuité de certaines inconnues aux points de croisement, les points qui appartiennent à plus de deux sous-domaines, en modifiant les multiplicateurs de Lagrange [30]. Les itérés des multiplicateurs de Lagrange prennent la nouvelle forme :

$$\lambda^k \rightarrow \lambda^k + C\gamma^k + G_I\beta^k \quad (3.36)$$

où C est une matrice qui localise le saut des déplacements aux coins du problème et $G_I\beta^k$ une force de traction au bord des sous-structures flottantes. L'algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté pour la résolution du problème d'interface FETI avec la nouvelle forme des multiplicateurs de Lagrange peut être interprété comme FETI à deux niveaux. A chaque itération de FETI on calcule dans un premier temps un multiplicateur de Lagrange λ^k pour réduire le saut des déplacements aux interfaces des sous-structures. On résout ensuite, pour chaque itéré λ^k , un problème grossier aux coins afin de trouver une correction optimale nécessaire pour assurer la continuité exacte de certaines inconnues aux interfaces. Cette interprétation à deux niveaux de la méthode conduit à un problème grossier dont la matrice est une projection de la matrice du problème d'interface FETI sur l'espace des multiplicateurs de Lagrange aux coins. Le problème Grossier de FETI-2 a la même forme que le problème (3.24) et peut être résolu de la même manière. Les détails sur cette méthode se trouvent dans [30], [23].

dual-primal FETI : FETI-DP

La méthode FETI-2 que nous venons de présenter est extensible pour les problèmes tels que les problèmes de plaque et de coque. Le problème grossier qui lui est associé est basé sur les modes rigides de chaque sous-domaine flottant et les modes de coins. Le problème grossier de FETI-2 est très grand comparé à celui de FETI à un champ. Sa résolution est la tâche prépondérante lorsqu'on applique la méthode aux problèmes de grande taille et peut limiter l'extensibilité de FETI-2. La méthode FETI-DP a été introduite dans [25] et développée dans [27] et [47] afin de réduire la taille du problème grossier de FETI-2 et améliorer son extensibilité parallèle. Nous découpons les données du problème (3.11) sous la forme

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{rr}^{(s)} & K_{rc}^{(s)} \\ K_{rc}^{(s)T} & K_{cc}^{(s)} \end{pmatrix}, u^{(s)} = \begin{pmatrix} u_r^{(s)} \\ u_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}, f^{(s)} = \begin{pmatrix} f_r^{(s)} \\ f_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

avec

$$u_r^{(s)} = \begin{pmatrix} u_i^{(s)} \\ u_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}, f_r^{(s)} = \begin{pmatrix} f_i^{(s)} \\ f_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Les indices supplémentaire c et r désignent respectivement les coins et le reste des degrés de liberté aux interfaces autres que les coins. On introduit aussi le vecteur global $u_c = \begin{pmatrix} u_c^{(1)} \\ u_c^{(2)} \end{pmatrix}$ où $u_c^{(j)}$, $j = 1, 2$ désignent le $j^{\text{ième}}$ noeud global qui coïncide avec un coin. On note $T_c^{(s)}$ l'opérateur de localisation de coins tel que $T_c^{(s)}u_c = u_{\Gamma_c}^{(s)}$ et $T_r^{(s)}$ la restriction de $T^{(s)}$ aux degrés de liberté autres que ceux des coins.

La méthode FETI-DP n'est extensible en dimension trois d'espace que si on impose des

contraintes optionnelles liées à la continuité de la moyenne des déplacements sur les interfaces au moyen d'un multiplicateur de Lagrange supplémentaire μ . Les équations d'équilibre par sous-domaine deviennent :

$$\begin{aligned} K_{rr}^{(1)} u_r^{(1)} + K_{rc}^{(1)} T_c^{(1)} u_c + T_r^{(1)T} \lambda + T_r^{(1)T} Q_r \mu &= f_r^{(1)}, \\ K_{rr}^{(2)} u_r^{(2)} + K_{rc}^{(2)} T_c^{(2)} u_c + T_r^{(2)T} \lambda + T_r^{(2)T} Q_r \mu &= f_r^{(2)}, \\ \sum_{s=1}^2 T_c^{(s)T} K_{rc}^{(s)T} u_r^{(s)} + \sum_{s=1}^2 T_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} T_c^{(s)} u_c &= f_c, \\ T_r^{(1)} u_r^{(1)} + T_r^{(2)} u_r^{(2)} &= 0, \\ Q_r^T T_r^{(1)} u_r^{(1)} + Q_r^T T_r^{(2)} u_r^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La matrice Q_r vient de la contrainte optionnelle $Q_r^T z^k = 0$ assurée par le multiplicateur de Lagrange μ où z^k est le résidu à l'itération k . Les deux premières équations de 3.38 correspondent à des problèmes avec les conditions de Dirichlet aux coins et les conditions de Neumann sur le reste de l'interface. On suppose que les conditions de Dirichlet sont suffisantes pour que les matrices $K_{rr}^{(1)}$ et $K_{rr}^{(2)}$ soient inversibles. L'élimination des déplacements $\{u_r^{(s)}\}_{s=1,2}$ dans le système (3.38) conduit au système d'interface dual-primal :

$$\begin{pmatrix} F_{I_{rr}} & \widetilde{F_{I_{rc}}} \\ \widetilde{F_{I_{rc}}}^T & -\widetilde{K_{cc}^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \widetilde{u_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_r \\ -\widetilde{f_c^*} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

où

$$\begin{aligned} F_{I_{rr}} &= T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} T_r^{(1)T} + T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} T_r^{(2)T}, \\ \widetilde{F_{I_{rc}}} &= \left(T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} K_{rc}^{(1)} T_c^{(1)} + T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} K_{rc}^{(2)} T_c^{(2)} \quad T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} T_r^{(1)T} Q_r + T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} T_r^{(2)T} Q_r \right), \\ \widetilde{K_{cc}^*} &= \begin{pmatrix} T_c^{(1)T} K_{cc}^{(1)} T_c^{(1)} + T_c^{(2)T} K_{cc}^{(2)} T_c^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} T_c^{(1)T} K_{rc}^{(1)T} K_{rr}^{(1)-1} K_{rc}^{(1)} T_c^{(1)} & T_c^{(1)T} K_{rc}^{(1)T} K_{rr}^{(1)-1} T_r^{(1)} Q_r \\ Q_r^T T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} K_{rc}^{(1)} T_c^{(1)} & Q_r^T T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} T_r^{(1)T} Q_r \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} T_c^{(2)T} K_{rc}^{(2)T} K_{rr}^{(2)-1} K_{rc}^{(2)} T_c^{(2)} & T_c^{(2)T} K_{rc}^{(2)T} K_{rr}^{(2)-1} T_r^{(2)} Q_r \\ Q_r^T T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} K_{rc}^{(2)} T_c^{(2)} & Q_r^T T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} T_r^{(2)T} Q_r \end{pmatrix}, \\ d_r &= T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} f_r^{(1)} + T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} f_r^{(2)}, \\ \widetilde{f_c^*} &= \begin{pmatrix} f_c - T_c^{(1)T} K_{rc}^{(1)T} K_{rr}^{(1)-1} f_r^{(1)} - T_c^{(2)T} K_{rc}^{(2)T} K_{rr}^{(2)-1} f_r^{(2)} \\ -Q_r^T T_r^{(1)} K_{rr}^{(1)-1} f_r^{(1)} - Q_r^T T_r^{(2)} K_{rr}^{(2)-1} f_r^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En éliminant les inconnues globales $\widetilde{u_c} = \begin{pmatrix} u_c \\ \mu \end{pmatrix}$ dans le système (3.39) on obtient le système d'interface de la méthode FETI-DP à résoudre par la méthode du gradient conjugué préconditionné :

$$\left(F_{I_{rr}} + \widetilde{F_{I_{rc}}} \widetilde{K_{cc}^*}^{-1} \widetilde{F_{I_{rc}}}^T \right) \lambda = d_r - \widetilde{F_{I_{rc}}} \widetilde{K_{cc}^*}^{-1} \widetilde{f_c^*}. \quad (3.40)$$

Signalons que les préconditionneurs utilisés dans toutes les variantes de la méthode FETI sont du type lumped ou Dirichlet que nous allons développer dans le chapitre 4.

3.4 Conclusion

On assiste ces dernières décénies à un regain d'intérêts pour les méthodes de décomposition de domaine. Le développement des calculateurs parallèles est l'un des moteurs propulseurs de la recherche sur les méthodes de décomposition de domaine. Ce sont les méthodes itératives qui profitent au mieux de cette technologie de calcul en pleine expansion. Plusieurs méthodes de sous-domaines existent aujourd'hui et certaines ont fait preuve d'efficacité sur les problèmes réalistes. FETI et BDD qui sont très utilisées en pratique sont présentées en détail dans les prochains chapitres.

Chapitre 4

La méthode FETI

4.1 Introduction

La méthode FETI a été initialement introduite par [31] pour résoudre le système linéaire issu d'une discrétisation du problème d'élasticité linéaire par une méthode des éléments finis. Le domaine du problème est séparé en plusieurs sous-domaines disjoints dont les déplacements aux interfaces sont faiblement continus. Cette condition de compatibilité aux interfaces est nécessaire pour revouvrir la solution globale. Elle est imposée par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange aux noeuds situés sur les frontières des sous-domaines. Le découpage en sous-domaines introduit en général des sous-domaines flottants et les modes à énergie nulle. On impose explicitement les conditions de compatibilité qui assurent l'existence de solutions dans les sous-domaines flottants. Ces solutions sont déterminées à des mouvements de corps rigides près. La prise en compte des modes rigides permet d'incorporer dans la méthode FETI un problème grossier naturel qui permet la communication globale entre les sous-domaines et de garantir son extensibilité.

4.2 Dérivation de la méthode

4.2.1 Le système linéaire

Nous considérons la résolution du système linéaire issu de la discrétisation par éléments finis du problème de l'élasticité linéaire. Soit Ω le volume de la structure à analyser, K sa matrice de rigidité, et f le vecteur force appliqué. Le problème à résoudre est de trouver les champs de déplacement u de la structure générés par la force f en résolvant le système

$$Ku = f. \quad (4.1)$$

4.2.2 Dérivation de la méthode

Nous subdivisons Ω en N_s sous-structures disjointes $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1, N_s}$ de frontière $\{\Gamma^{(s)}\}_{s=1, N_s}$, et nous notons par $K^{(s)}$, $u^{(s)}$, $f^{(s)}$ et $T^{(s)}$ respectivement la matrice de rigidité locale, les champs de déplacement locaux, les forces locales, et une matrice booléenne signée constituée d'éléments 0, -1 et 1 qui décrit l'interconnectivité des sous-domaines. L'action de la matrice $T^{(s)}$ sur une matrice ou un vecteur local consiste à en extraire les composantes situées sur l'interface et à les signer. Le problème (4.1) est équivalent à un ensemble de problèmes locaux contraints par la continuité des déplacements locaux :

$$K^{(s)}u^{(s)} = f^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N_s \quad (4.2)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} u^{(s)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_I = \cup_{s=1, N_s} \Gamma^{(s)}. \quad (4.3)$$

Résoudre les problèmes locaux (4.2) sous la contrainte (4.3) est équivalent à la recherche du point-selle associé au Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} v^{(s)T} K^{(s)} v^{(s)} - \sum_{s=1}^{N_s} v^{(s)T} f^{(s)} + \mu^T \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} v^{(s)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} v^{(s)T} K^{(s)} v^{(s)} - \sum_{s=1}^{N_s} v^{(s)T} \left(f^{(s)} - T^{(s)T} \mu \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N_s)})$ est le vecteur des déplacements locaux, μ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange introduits aux interfaces des sous-domaines pour assurer la continuité des déplacements locaux et $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(N_s)})$. Nous introduisons deux fonctionnelles d'énergie $\mathcal{C}(v)$ et $\mathcal{E}(v)$ suivantes :

$$\mathcal{C}(\mu) = \inf_v \mathcal{L}(v, \mu), \quad \mathcal{E}(v) = \sup_{\mu} \mathcal{L}(v, \mu). \quad (4.5)$$

On sait que résoudre le problème (4.1) est équivalent à résoudre le problème de point-selle [32] :

$$\text{Trouver } (u, \lambda) \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}(u, \lambda) = \sup_{\mu} \inf_v \mathcal{L}(v, \mu) = \sup_{\mu} \mathcal{C}(\mu) \quad (4.6)$$

ou à résoudre le problème dual

$$\text{Trouver } (u, \lambda) \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}(u, \lambda) = \inf_v \sup_{\mu} \mathcal{L}(v, \mu) = \inf_v \mathcal{E}(v). \quad (4.7)$$

Dans le problème (4.6), les multiplicateurs de Lagrange μ sont admissibles si et seulement si $\mathcal{C}(\mu)$ est fini, et dans le problème (4.7), le déplacement v est admissible si et seulement si $\mathcal{E}(v)$ est fini. On peut montrer que [32] :

$$\mathcal{E}(v) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} v^{(s)} = 0, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{C}(\mu) > -\infty \Leftrightarrow f^{(s)} - T^{(s)T} \mu \perp \ker(K^{(s)}). \quad (4.9)$$

L'équation (4.8) exprime la continuité des champs de déplacement au travers des interfaces des sous-domaines et l'équation (4.9) est la condition de compatibilité nécessaire à l'existence d'une solution en déplacement dans les sous-structures flottantes où la matrice de rigidité locale est singulière. La solution du problème de point selle (4.7) peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(v, \mu)}{\partial v^{(s)}} \Big|_{(u^{(s)}, \lambda)} = 0 &\Leftrightarrow K^{(s)} u^{(s)} = f^{(s)} - T^{(s)T} \lambda^{(s)}, s = 1, \dots, N_s; \\ \frac{\partial \mathcal{L}(v, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{(u^{(s)}, \lambda)} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} u^{(s)} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Remarquons que la première de l'équation (4.10) implique que $f^{(s)} - T^{(s)T} \lambda \perp \ker(K^{(s)})$.

4.2.3 Traitement des singularités locales

En pratique, le découpage du volume de la structure à analyser génère des sous-structures flottantes, celles qui n'ont pas suffisamment de déplacements imposés pour éliminer les modes rigides. Les matrices locales de ces sous-structures sont singulières et un traitement spécifique est nécessaire pour résoudre les équations d'équilibre correspondantes. Si $\Omega^{(s)}$ est une sous-structure flottante, on détermine $u^{(s)}$ de la manière suivante :

$$u^{(s)} = K^{(s)+} \left(f^{(s)} - T^{(s)T} \lambda \right) + R^{(s)} \alpha^{(s)}, \quad (4.11)$$

où $K^{(s)+}$ est un inverse généralisé de $K^{(s)}$, $R^{(s)}$ est une matrice rectangulaire dont les colonnes forment une base du noyau de $K^{(s)}$, et $\alpha^{(s)}$ les coefficients de combinaison linéaire des modes rigides. L'existence de $u^{(s)}$ donnée en (4.11) est possible si et seulement si $\left(f^{(s)} - T^{(s)T} \lambda \right)$ est orthogonale au noyau de $K^{(s)}$ qui peut s'exprimer par

$$R^{(s)T} \left(f^{(s)} - T^{(s)T} \lambda \right) = 0. \quad (4.12)$$

4.2.4 Le problème d'interface projeté

La substitution de l'expression (4.11) de $u^{(s)}$ dans la deuxième équation de (4.10) et la prise en compte de la condition de compatibilité (4.12) pour chaque sous-domaine flottant conduisent au problème d'interface de FETI suivant :

$$\begin{pmatrix} F_I & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -e \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

avec

$$F_I = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} K^{(s)+} T^{(s)T}, \quad G_I = \left(T^{(1)} R^{(1)} \quad \dots \quad T^{(N_f)} R^{(N_f)} \right), \quad \alpha = \left(\alpha^{(1)T} \quad \dots \quad \alpha^{(N_f)T} \right),$$

$$d = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} K^{(s)+} f^{(s)}, \quad e^{(s)} = \left(f^{(s)T} R^{(s)T} \right)^T \quad s = 1, \dots, N_f,$$

$$K^{(s)+} = \begin{cases} K^{(s)-1} & \text{si } \Omega^{(s)} \text{ n'est pas une sous-structure flottante,} \\ \text{un inverse généralisé de } K^{(s)} & \text{si } \Omega^{(s)} \text{ est une sous-structure flottante,} \end{cases}$$

et N_f le nombre de sous-domaines flottants. L'indice I désigne une quantité interface située sur Γ_I . Ainsi, pour un découpage arbitraire du volume de la structure et des conditions aux limites arbitraires, la présence des sous-domaines flottants conduit à un problème d'interface dont la matrice

$$L = \begin{pmatrix} F_I & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix}$$

est indéfinie. Pour des problèmes de grande taille et des maillages fins, il n'est pas réaliste d'assembler explicitement F_I dont la taille n_I est le nombre des degrés de liberté situés sur Γ_I . Ceci exclut la résolution du problème d'interface (4.13) par une méthode directe. L'algorithme du gradient conjugué préconditionné constitue une alternative efficace puisque après la factorisation des matrices locales $\{K^{(s)}\}_{s=1, \dots, N_s}$, les produits matrices-vecteurs de la forme $F_I v$, où v désigne un vecteur de taille n_I , peuvent être calculés efficacement par remontée et descente. Rappelons les théorèmes suivants [32] :

Théorème 4.1. *En présence de points multiples, F_I est semi-définie positive.*

Théorème 4.2. *Si la structure initiale n'est pas une structure flottante, G_I est de rang fini.*

La symétrie de F_I permet de réécrire le problème d'interface (4.13) comme suit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T F_I \lambda - \lambda^T (G_I \alpha + d), \\ \text{sous} \quad & \text{la contrainte} \quad G_I^T \lambda = e. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Du théorème 4.1, il suit que le problème de minimisation (4.14) peut être résolu avec une méthode de gradient conjugué projeté à condition d'assurer à chaque itération k la contrainte $G_I^T \lambda^k = e$. Cela suggère l'introduction d'un algorithme de gradient conjugué projeté où à chaque itération, un projecteur P supprime de la solution λ^k la composante qui ne satisfait pas la contrainte.

Supposons que l'itéré λ^0 choisi satisfait l'équation $G_I^T \lambda^0 = e$. Alors, pour tout $k > 0$, λ^k doit satisfaire $G_I^T \lambda^k = 0$. Si nous décomposons \mathbb{R}^{N_k} sous la forme

$$\mathbb{R}^{N_k} = \text{Ker}(G_I^T) \oplus \text{Ker}(G_I^T)^\perp = \text{Ker}(G_I^T) \oplus \text{Im}(QG_I)$$

où Q est une matrice symétrique définie positive, alors λ^k se décompose sous la forme

$$\lambda^k = \lambda_1^k + QG_I \eta^k. \quad (4.15)$$

Un projecteur approprié P est une matrice qui envoie λ^k sur le noyau de G_I^T :

$$\lambda^k \rightarrow P\lambda^k = \lambda_1^k = \lambda^k - QG_I \eta^k. \quad (4.16)$$

En multipliant l'équation (4.15) par G_I^T et en utilisant l'équation (4.16), on obtient les projecteurs

$$P(Q) = I - QG_I (G_I^T QG_I)^{-1} G_I^T. \quad (4.17)$$

Le système (4.13) est alors équivalent au système projeté [34] :

$$P^T F_I P \lambda = P^T (d - F_I \lambda^0). \quad (4.18)$$

La méthode FETI introduit un projecteur naturel $P(Q)$ construit à partir des mouvements de corps rigides qui permet une propagation globale d'information avec l'espace grossier

$$\text{Im}(QG_I) = \left\{ \Psi : \Psi = \sum_{s=1}^{N_s} Q^{(s)} T^{(s)} z^{(s)}, z^{(s)} \in \mathbb{R}^{\dim(\text{Ker}(K^{(s)}))} \right\}. \quad (4.19)$$

4.3 Résolution du problème d'interface projeté

4.3.1 Préconditionnement

Une question essentielle lors de la résolution par la méthode du gradient conjugué d'un système matriciel est le choix d'un preconditionneur pour accélérer la convergence. Nous présentons ci-dessous les deux preconditionneurs le plus souvent utilisés dans la résolution du problème d'interface FETI.

Le préconditionneur Dirichlet

Le préconditionneur Dirichlet provient d'une interprétation physique de l'opérateur FETI F_I et a été introduit par [24]. D'un point de vue de la mécanique de structure, l'action de F_I consiste à calculer le saut du champ de déplacement à travers l'interface Γ_I correspondant à une traction imposée. L'opération inverse consiste à imposer ce saut à l'interface des sous-domaines et à calculer les efforts correspondants. Cette interprétation de l'opérateur FETI permet de construire un préconditionneur optimal du problème d'interface dual en assemblant les opérateurs primaux locaux comme suit :

$$\widetilde{F}_I^{D^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{i\Gamma}^{(s)T} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} \quad (4.20)$$

où $S^{(s)}$ est le complément de Schur de la matrice locale

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{i\Gamma}^{(s)T} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Le préconditionneur lumped

L'application du préconditionneur Dirichlet nécessite une double factorisation pour chaque sous-structure $\Omega^{(s)}$ étant donné l'ordonnancement optimal différent des matrices $K_{ii}^{(s)}$ et $K^{(s)}$. De plus, chaque itération requiert une phase de remontée/descente sur les degrés de liberté internes. Afin d'éviter le coût en calcul et en mémoire du préconditionneur Dirichlet, on peut utiliser le préconditionneur lumped non optimal mais moins coûteux [31] et [32] :

$$\widetilde{F}_I^{L^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} \quad (4.21)$$

4.3.2 L'algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté

Étant donné un préconditionneur \widetilde{F}_I , l'algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté s'écrit [32] :

1. Initialisation

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= QG_I \left(G_I^T QG_I \right)^{-1} \left[f^{(1)T} R^{(1)}, \dots, f^{(1)T} R^{(1)} \right], \\ r^0 &= d - F_I \lambda^0. \end{aligned}$$

2. Itérer sur k jusqu'à convergence
Projeter

$$w^{k-1} = \left[I - G_I \left(G_I^T QG_I \right)^{-1} G_I^T Q \right] r^{k-1}.$$

Préconditionner

$$z^{k-1} = \widetilde{F}_I^{-1} w^{k-1}.$$

Reprojeter

$$\begin{aligned}
y^{k-1} &= \left[I - QG_I \left(G_I^T QG_I \right)^{-1} G_I^T \right] z^{k-1}, \\
\zeta^k &= y^{k-1^T} w^{k-1} / y^{k-2^T} w^{k-2} \quad (\zeta^1 = 0), \\
p^k &= y^{k-1} + \zeta^k p^{k-1} \quad (p^1 = y^0), \\
\nu^k &= y^{k-1^T} w^{k-1} / p^{k^T} F_I p^k, \\
\lambda^k &= \lambda^{k-1} + \nu^k p^k, \\
r^k &= r^{k-1} - \nu^k F_I p^k.
\end{aligned}$$

4.3.3 Taux de convergence

La réduction de l'erreur de la méthode du gradient conjugué préconditionné est étroitement liée au conditionnement de la matrice du système linéaire [37]. Le conditionnement du système de FETI préconditionné est donné dans le théorème suivant [58], [45] :

Théorème 4.3. *Le nombre de conditionnement de la méthode FETI avec le préconditionneur Dirichlet satisfait :*

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max} \left(P^T \widetilde{F}_I^{D^{-1}} P F_I \right)}{\lambda_{\min} \left(P^T \widetilde{F}_I^{D^{-1}} P F_I \right)} \leq \text{const} \left(1 + \ln \left(\frac{H}{h} \right) \right)^2$$

où $\lambda_{\max} \left(P^T \widetilde{F}_I^{D^{-1}} P F_I \right)$ et $\lambda_{\min} \left(P^T \widetilde{F}_I^{D^{-1}} P F_I \right)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de $P^T \widetilde{F}_I^{D^{-1}} P F_I$, H le diamètre maximum des sous-domaines, h la taille du maillage et const une constante indépendante de tout paramètre.

Chapitre 5

La méthode du complément de Schur primal et le préconditionneur BDD

5.1 Introduction

Supposons que le domaine Ω soit décomposé en N_s sous-domaines $\Omega^{(s)}$. Notons $L_\Gamma^{(s)}$ la matrice de restriction qui envoie les degrés de liberté globaux de l'interface Γ sur les degrés de liberté locaux du sous-domaine $\Omega^{(s)}$. Si on numérote les noeuds en commençant par les noeuds internes identifiés par l'indice i , puis les noeuds frontières identifiés par l'indice Γ , le système (3.11) $Ku = f$ devient :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & K_{i\Gamma}^{(1)} L_\Gamma^{(1)} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(N_s)} & K_{i\Gamma}^{(N_s)} L_\Gamma^{(N_s)} \\ L_\Gamma^{(1)T} K_{\Gamma i}^{(1)} & \cdots & \cdots & L_\Gamma^{(N_s)T} K_{\Gamma i}^{(N_s)} & \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(N_s)} \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(N_s)} \\ \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} f_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

La méthode du complément de Schur primal est une méthode qui permet de ramener la résolution du système linéaire (5.1) à la résolution d'un problème d'interface. En développant le système matriciel (5.1), après élimination des inconnues internes, on obtient le problème d'interface suivant :

$$Su_\Gamma = b, \quad (5.2)$$

avec

$$S = \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} S^{(s)} L_\Gamma^{(s)}, \quad S^{(s)} = K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{(s)}.$$

Chacune des matrices $S^{(s)}$ correspond à une condensation statique locale et appelée le complément de Schur, qui lorsqu'il est assemblé détruit la structure creuse initiale de la matrice K . Pour des structures arbitraires de grande taille en dimension trois, l'assemblage du problème d'interface peut être très coûteux en stockage et en ressources de calcul. Cela rend l'usage d'une méthode directe prohibitif.

Alternativement, on peut résoudre le problème d'interface (5.2) par l'algorithme du gradient conjugué comme dans les méthodes de décomposition de domaine. Dans ce cas, il

n'est pas nécessaire d'assembler explicitement la matrice $S = \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} S^{(s)} L_\Gamma^{(s)}$. Après la factorisation des matrices $K_{ii}^{(s)}$, chaque produit matrice-vecteur de la forme

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} \left(K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} \right) L_\Gamma^{(s)} p_\Gamma^k$$

peut être efficacement calculé en effectuant des produits matrices-vecteurs creux sous-structure par sous-structure et des substitutions descentes et remontées. L'efficacité de la méthode du gradient conjugué dépend du choix d'un préconditionneur performant. Nous avons présenté dans l'introduction le préconditionneur Neumann-Neumann qui est très robuste pour la résolution des problèmes réalistes. Ses performances dépendent du nombre de sous-domaines et l'adjonction d'un préconditionneur grossier est nécessaire pour le rendre extensible par rapport au nombre de sous-domaines. L'utilisation dans le préconditionneur Neumann-Neumann d'un problème grossier construit à partir des noyaux éventuels des compléments de Schur locaux $S^{(s)}$ conduit à la méthode BDD que nous présentons dans ce chapitre.

5.2 Calcul du produit matrice-vecteur avec le complément de Schur et son inverse

Nous supposons que le complément de Schur assemblé S est symétrique défini positif. Le problème (5.2) peut alors être résolu par une méthode de gradient conjugué préconditionné. Un élément essentiel lors de cette résolution est le calcul des produits matrices-vecteurs. Nous montrons ci-dessous l'évaluation de l'action des compléments de Schur locaux et de leurs inverses sur un vecteur.

5.2.1 Calcul du produit matrice-vecteur avec le complément de Schur

La résolution de l'équation (5.2) par la méthode du gradient conjugué préconditionné nécessite le calcul, pour chaque sous-domaine, du produit matrice-vecteur

$$\left(K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} \right) L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma.$$

Ce calcul se fait en deux étapes :

1. Résoudre le problème de Dirichlet en imposant au bord du sous-domaine la condition de Dirichlet $L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma$:

$$K_{ii}^{(s)} v^{(s)} = -K_{i\Gamma}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma,$$

2. Calculer les produits matrices-vecteurs suivants en utilisant la solution obtenue à l'étape précédente :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{i\Gamma}^{(s)T} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma \\ L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S^{(s)} L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

En élasticité linéaire, l'action du complément de Schur local $S^{(s)}$ sur un déplacement local $L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma$ s'interprète comme évaluer la traction interface correspondant au déplacement $L_\Gamma^{(s)} u_\Gamma$.

5.2.2 Calcul du produit matrice-vecteur avec l'inverse du complément de Schur

L'action de l'inverse du complément de Schur local $S^{(s)}$ sur un vecteur $r_\Gamma^{(s)}$ peut être évaluée de la façon suivante :

1. Résoudre le problème de Neumann

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{i\Gamma}^{(s)T} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_i^{(s)} \\ z_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

2. Récupérer la trace de la solution du problème (5.4)

Nous déduisons de la première ligne du système de Neumann (5.4) que

$$\hat{z}_i^{(s)} = -K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} r_\Gamma^{(s)}.$$

En reportant l'expression ci-dessus dans la deuxième ligne de l'équation (5.4) on peut montrer que

$$z_\Gamma^{(s)} = \left(K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - K_{\Gamma i}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{i\Gamma}^{(s)} \right)^{-1} r_\Gamma^{(s)}.$$

L'interprétation précédente de l'action du complément de Schur local sur un déplacement local permet de comprendre le sens physique de l'action de l'inverse du complément de Schur local sur une traction interface. C'est l'opération qui consiste à calculer le déplacement correspondant à une traction interface donnée.

5.3 Le préconditionnement

5.3.1 Le préconditionneur Neumann-Neumann

L'algorithme du gradient conjugué préconditionné nécessite la résolution à chaque itération d'un problème $Mz = r$ où M est la matrice de préconditionnement et r le résidu. La matrice de préconditionnement proposée par [20] est de la forme

$$M^{-1} = \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} D^{(s)} S^{(s)-1} D^{(s)} L_\Gamma^{(s)}$$

où $D^{(s)}$ sont des matrices de pondération qui forment une partition de l'unité

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} D^{(s)} L_\Gamma^{(s)} = I.$$

Le calcul de $M^{-1}r$ se fait avec l'algorithme suivant :

Algorithme 5.1. *Préconditionneur Neumann-Neumann*

1. Distribuer r aux sous-domaines en posant

$$r^{(s)} = D^{(s)} L_\Gamma^{(s)} r, \quad s = 1, \dots, N_s;$$

2. Résoudre les problèmes de Neumann locaux

$$S^{(s)} z^{(s)} = r^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N_s. \quad (5.5)$$

3. Prendre la somme pondérée des solutions locales sur les interfaces en posant

$$z = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} z^{(s)}.$$

Le préconditionneur Neumann-Neumann présente deux inconvénients :

1. Les problèmes de Neumann (5.5) peuvent être mal posés,
2. Le conditionnement de l'algorithme se détériore avec l'augmentation du nombre de sous-domaines par manque de communication globale entre les sous-domaines.

Une méthode qui permet de remédier aux défauts du préconditionneur Neumann-Neumann consiste à équilibrer les résidus à chaque itération et à introduire un espace grossier qui contient tous les modes à énergie nulle. On sait en effet que dans les méthodes multi-grilles et les méthodes de décomposition de domaine un problème grossier est nécessaire pour supprimer les composantes à basse fréquence du résidu [74], [68]. Une historique et une description de la construction des problèmes grossiers sont données dans [78] et [57]. Nous présentons ci-dessous un préconditionneur qui enrichit le préconditionneur Neumann-Neumann avec un problème grossier construit à partir des noyaux des problèmes de Neumann locaux [54].

5.3.2 Le préconditionneur BDD

Les problèmes de Neumann (5.5) admettent au moins une solution si et seulement si

$$\langle v, r^{(s)} \rangle = 0, \quad \forall v \in \ker \left(S^{(s)} \right).$$

Soient V l'espace des degrés de liberté interfaces globaux et $V^{(s)}$ les espaces de degrés de liberté interfaces locaux associés aux sous-domaines $\Omega^{(s)}$, $l_s = \dim \left(V^{(s)} \right)$. Considérons la matrice à l_s lignes et m_s colonnes $Z^{(s)}$ dont l'image contient le noyau de $S^{(s)}$,

$$\ker \left(S^{(s)} \right) \subset \text{Im} \left(Z^{(s)} \right).$$

Soit W le sous-espace de V défini par :

$$W = \left\{ v \in V, v = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} Z^{(s)} \mu^{(s)}, \mu^{(s)} \in \mathbb{R}^{m_s} \right\}$$

Le calcul de $z = M^{-1}r$ par la méthode BDD se fait de la manière suivante :

1. Chercher un élément

$$w = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} Z^{(s)} \lambda^{(s)} \in W$$

en résolvant le problème grossier :

$$\langle Sw, L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} Z^{(s)} \mu^{(s)} \rangle = \langle r, L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} Z^{(s)} \mu^{(s)} \rangle, \quad \forall \mu^{(s)} \in \mathbb{R}^{m_s}. \quad (5.6)$$

En remplaçant w dans (5.6), on arrive à la résolution du système

$$\left(C^T SC \right) \lambda = C^T r \quad (5.7)$$

avec

$$C = \left(\dots \quad L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} z^{(s)} \quad \dots \right), \quad \left(C^T SC \right)_{ij} = Z^{(i)T} D^{(i)T} L_{\Gamma}^{(i)} S L_{\Gamma}^{(j)T} D^{(j)} Z^{(j)}.$$

2. Poser $s = r - Sw$, $s^{(s)} = D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} s$ et résoudre les problèmes de Neumann locaux

$$S^{(s)} u^{(s)} = s^{(s)}. \quad (5.8)$$

Les solutions du problème (5.8) sont déterminées à un élément du noyau de $S^{(s)}$ additif près. On en fixe une notée $u^{(s)+} = S^{(s)+} s^{(s)}$ où $S^{(s)+}$ est un pseudo-inverse de $S^{(s)}$.

3. Définir $z := M^{-1}r$ sous la forme $M^{-1}r := C\mu + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+}$ où μ est choisi de façon à minimiser la différence $(M^{-1} - S^{-1})$ [49]. En d'autre terme μ est le minimiseur de la fonctionnelle $j(\mu) = \langle S(M^{-1} - S^{-1})r, (M^{-1} - S^{-1})r \rangle$ [49]. Nous avons

$$\begin{aligned} j(\mu) &= \left(\langle SM^{-1}r - 2r, M^{-1}r \rangle + \langle r, S^{-1}r \rangle \right) \\ &= \left\langle S \left(C\mu + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+} \right) - 2r, C\mu + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+} \right\rangle + \langle r, S^{-1}r \rangle. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(\mu + t\beta) - j(\mu)}{t} = 0, \quad \forall \beta &\Leftrightarrow \left\langle C^T S \left(\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+} + C\mu \right) - C^T r, \beta \right\rangle = 0, \quad \forall \beta \\ &\Leftrightarrow \left\langle C^T SC\mu + C^T S \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+} - C^T r, \beta \right\rangle = 0, \quad \forall \beta \\ &\Leftrightarrow \left\langle C^T SC\mu + C^T S \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+} - C^T SC\lambda, \beta \right\rangle = 0, \quad \forall \beta. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé (5.7) dans la dernière égalité. Cette étape de la méthode BDD conduit donc à la résolution du système :

$$(C^T SC) \mu = -C^T S (u^+ - C\lambda) \quad (5.9)$$

avec

$$u^+ = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)+}.$$

4. Prendre la somme pondérée sur les interfaces

$$z = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} (u^{(s)+} + Z^{(s)} \mu^{(s)}).$$

Le gradient conjugué préconditionné par BDD

La méthode du gradient conjugué préconditionné est une méthode efficace pour résoudre le système linéaire $Su_{\Gamma} = b$ lorsque le complément de Schur S est symétrique défini positif ou symétrique semi-défini positif. Cela nécessite l'introduction d'une matrice M appelée péconditionneur. On se ramène à la résolution du système $M^{-1}Su_{\Gamma} = M^{-1}b$ équivalent au système d'interface $Su_{\Gamma} = b$. Cette méthode nécessite à chaque itération la résolution d'un problème auxiliaire $Mz = r$ où r est le résidu à l'étape considérée. L'intérêt de la méthode du gradient conjugué préconditionné repose sur la facilité de la résolution du problème $Mz = r$. Nous choisissons la méthode BDD comme péconditionneur et une famille de poids $\{D^{(s)}\}_{s=1, N_s}$ formant une partition de l'unité [54]. Rappelons l'algorithme BDD

1. Distribuer le résidu r aux sous-domaines en posant

$$r^{(s)} = D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} r,$$

2. Résoudre les problèmes de Neumann locaux

$$S^{(s)} u^{(s)} = r^{(s)}.$$

Nous avons supposé qu'un pré-traitement a permis de rendre les seconds membres de ces problèmes compatibles afin d'assurer l'existence d'une solution. Sachant que les solutions des problèmes de Neumann sont déterminées à un élément du noyau additif près, le préconditionneur BDD est défini par

- 3.

$$\begin{aligned} M^{-1}r &= \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} \left(u^{(s)} + z^{(s)} \alpha^{(s)} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} + \begin{pmatrix} L_{\Gamma}^{(1)T} D^{(1)} z^{(1)} & \dots & L_{\Gamma}^{(N_s)T} D^{(N_s)} z^{(N_s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha^{(N_s)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $z^{(s)}$ est le générateur d'un espace contenant le noyau de $S^{(s)}$. Le préconditionneur prend finalement la forme

$$M^{-1}r = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} + C\alpha$$

avec $C = \left(L_{\Gamma}^{(1)T} D^{(1)} z^{(1)} \dots L_{\Gamma}^{(N_s)T} D^{(N_s)} z^{(N_s)} \right)$ et $\alpha = \left(\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(N_s)} \right)$. La méthode BDD détermine l'inconnue α pour que l'opérateur M^{-1} soit le plus proche possible de l'inverse du complément de Schur S en minimisant la différence $SM^{-1}r - r$. Nous venons de montrer que cette minimisation conduit à l'égalité :

$$SM^{-1}r - r \text{ minimale} \Leftrightarrow \left\langle C^T S \left(\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} + C\alpha \right) - C^T r, \beta \right\rangle = 0, \quad \forall \beta. \quad (5.10)$$

L'équation (5.10) se réécrit simplement

$$C^T S C \alpha = C^T \left(r - S \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} \right).$$

Soient une itérée initiale \tilde{u}_0 , un gradient initial $\tilde{g}_0 = S\tilde{u}_0 - b$ et un gradient local initial $\tilde{g}_0^{(s)} = S^{(s)}\tilde{u}_0 - b^{(s)}$ avec $b = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} b^{(s)}$.

Algorithme 5.2. *Gradient conjugué préconditionné par BDD*

– *Pré-traitement, initialisation*

$$\begin{aligned} u_0 &= \tilde{u}_0 - C \left(C^T S C \right)^{-1} C^T \tilde{g}_0, \\ g_0^{(s)} &= \tilde{g}_0^{(s)} - S^{(s)} C \left(C^T S C \right)^{-1} C^T \tilde{g}_0^{(s)}, \\ g_0 &= \tilde{g}_0 - S C \left(C^T S C \right)^{-1} C^T \tilde{g}_0, \\ z_0 &= \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} S^{(s)+} D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} g_0, \\ w_0 &= \left(I - C \left(C^T S C \right)^{-1} (S C)^T \right) z_0. \end{aligned}$$

– itération sur k jusqu'à convergence

$$\begin{aligned}
\rho_{k-1} &= - \frac{\sum_{s=1}^{N_s} \left(L_{\Gamma}^{(s)T} g_{k-1}^{(s)}, w_{k-1} \right)}{\sum_{s=1}^{N_s} \left(L_{\Gamma}^{(s)T} S^{(s)} w_{k-1}, w_{k-1} \right)}, \\
u_k &= u_{k-1} + \rho_{k-1} w_{k-1}, \\
g_k^{(s)} &= g_{k-1}^{(s)} + \rho_{k-1} S^{(s)} w_{k-1}, \\
g_k &= g_{k-1} + \rho_{k-1} S w_{k-1}, \\
z_k &= \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} S^{(s)+} D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} g_k, \\
y_k &= \left(I - C \left(C^T S C \right)^{-1} (S C)^T \right) z_k, \\
\gamma_{k-1} &= - \frac{\sum_{s=1}^{N_s} \left(L_{\Gamma}^{(s)T} S^{(s)} w_{k-1}, y_k \right)}{\sum_{s=1}^{N_s} \left(L_{\Gamma}^{(s)T} S^{(s)} w_{k-1}, w_{k-1} \right)}, \\
w_k &= y_k + \gamma_{k-1} w_{k-1}.
\end{aligned}$$

avec $S^{(s)+}$ un inverse généralisé du complément de Schur $S^{(s)}$.

Le théorème suivant prouve l'extensibilité de BDD [54, 55]

Taux de convergence

Théorème 5.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou $d = 3$. Il existe une constante $const$ indépendante de la taille des sous-domaines H et de la finesse du maillage h telle que le nombre de conditionnement de BDD satisfait*

$$cond(M, S) \leq const \left(1 + \ln \left(\frac{H}{h} \right) \right)^2.$$

Chapitre 6

Extension de la méthode BDD aux problèmes singuliers et à la structure d'interface définie par paire de sous-domaines

6.1 Introduction

Les problèmes semi-définis positifs apparaissent dans de nombreuses applications et algorithmes mais leur analyse théorique rigoureuse a été peu abordée ([7, 6, 65], [50]). La résolution de problèmes singuliers par FETI a été effectuée par [65, 17]. Nous nous proposons d'adapter la méthode BDD afin de résoudre les problèmes globalement irréguliers dans la section 6.2. Ce travail a fait l'objet de la communication [72]. La méthode BDD et la méthode FETI sont étroitement liées par leurs analyses théoriques, leurs mises en oeuvre et leurs propriétés de convergence [69, 45]. L'une de leur différence repose sur la définition de l'interface. La méthode FETI définit l'interface comme intersection de paire de sous-domaines alors que la méthode BDD définit l'interface comme l'ensemble de points appartenant à plusieurs sous-domaines. Ces deux définitions sont identiques dans une décomposition en bande mais sont différentes en présence de points multiples. Les points multiples appartiennent à plusieurs interfaces lorsque l'interface est définie par l'intersection de paire de sous-domaines. Ces redondances aux points multiples sont favorables à la vitesse de convergence de FETI mais défavorables à la convergence de BDD. Nous introduisons dans la section 6.3 une technique qui permet de supprimer dans la méthode BDD la redondance des points multiples dans les interfaces définies par paire de sous-domaines.

6.2 BDD pour les problèmes semi-définis positifs

Nous considérons la résolution du système (5.1) par la méthode du gradient conjugué préconditionné. Introduisons les matrices et les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} K_{II} &= \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(N_s)} \end{pmatrix}, \quad K_{I\Gamma} = \begin{pmatrix} K_{i\Gamma}^{(1)} L_{\Gamma}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{i\Gamma}^{(N_s)} L_{\Gamma}^{(N_s)} \end{pmatrix}, \\ U_I &= \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(N_s)} \end{pmatrix}, \quad f_I = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(N_s)} \end{pmatrix}, \\ K_{\Gamma\Gamma} &= \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)}, \quad f_{\Gamma} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} f_{\Gamma}^{(s)}. \end{aligned}$$

Le système (5.1) se réécrit : Trouver (U_I, U_{Γ}) tel que :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{I\Gamma} \\ K_{I\Gamma}^T & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{\Gamma} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Le système d'interface (5.2) quant à lui devient : Trouver U_{Γ} tel que

$$S U_{\Gamma} = f_{\Gamma} - K_{I\Gamma}^T K_{II}^{-1} f_I = b. \quad (6.2)$$

Nous supposons que la matrice K du système linéaire (6.1) est singulière de noyau (R_I, R_{Γ}) et nous allons montrer que cette singularité entraîne celle du complément de Schur S et du problème grossier de la méthode BDD.

6.2.1 Conséquences de la singularité globale d'une matrice sur la méthode BDD

On appelle l'inertie d'une matrice K le triplet (p, q, t) où p, q, t sont respectivement le nombre de valeurs propres négatives, nulles et positives de la matrice K [37]. Rappelons la loi d'inertie de Sylvester [37] :

Théorème 6.1. *Si $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice régulière, alors K et $X^T K X$ ont la même inertie.*

Lemme 6.2. *Le complément de Schur S associé à une matrice K est singulier si et seulement si la matrice K est singulière. De plus si nous notons (R_I, R_{Γ}) le noyau de K et N celui de S nous avons la relation*

$$\begin{pmatrix} R_I \\ R_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{II}^{-1} K_{I\Gamma} N \\ N \end{pmatrix}$$

Démonstration :

En utilisant les notations (6.1), on peut montrer la relation suivante entre la matrice K et son complément de Schur S :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -K_{I\Gamma}^T K_{II}^{-1} & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{II} & K_{I\Gamma} \\ K_{I\Gamma}^T & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & -K_{II}^{-1} K_{I\Gamma} \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Les blocs diagonaux de la matrice K_{II} correspondent aux matrices des problèmes de Dirichlet et sont tous réguliers. Il s'en suit que la matrice K_{II} est toujours inversible. La singularité de la matrice K du problème (5.1) est donc équivalente à celle du complément de Schur S par la loi d'inertie de Sylvester et l'égalité (6.3). On peut aisément montrer les relations suivantes entre le noyau de la matrice K et le noyau de son complément de Schur S :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{I\Gamma} \\ K_{I\Gamma}^T & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_I \\ R_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S R_\Gamma = 0 \quad (6.4)$$

$$S N = 0 \implies \begin{pmatrix} K_{II} & K_{I\Gamma} \\ K_{I\Gamma}^T & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{II}^{-1} K_{I\Gamma} \\ Id \end{pmatrix} N = 0. \quad (6.5)$$

La relation (6.4) montre que le noyau du complément de Schur S est la trace du noyau de la matrice K aux interfaces. L'égalité (6.5) permet quant à elle de reconstruire le noyau de la matrice K à partir du noyau du complément de Schur par relèvement.

La solvabilité du système (6.1) est astreinte à la condition d'orthogonalité du noyau (R_I, R_Γ) et du second membre $\begin{pmatrix} f_I \\ f_\Gamma \end{pmatrix}$ que nous supposons vérifiée. Cette dernière hypothèse s'écrit :

$$R_I^T f_I + R_\Gamma^T f_\Gamma = 0. \quad (6.6)$$

Nous allons montrer que la solvabilité du système (6.2) est une conséquence de l'égalité (6.6). Nous avons :

$$\begin{pmatrix} K_{II} & K_{I\Gamma} \\ K_{I\Gamma}^T & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_I \\ R_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies R_I = -K_{II}^{-1} K_{I\Gamma} R_\Gamma \implies R_I^T = -R_\Gamma^T K_{I\Gamma}^T K_{II}^{-1}. \quad (6.7)$$

Calculons le produit scalaire de la trace du noyau de la matrice K et du second membre du système (6.2) en utilisant l'égalité (6.7) :

$$R_\Gamma^T f_\Gamma - R_\Gamma^T K_{I\Gamma}^T K_{II}^{-1} f_I = R_\Gamma^T f_\Gamma + R_I^T f_I = 0. \quad (6.8)$$

Nous avons obtenu la relation d'orthogonalité ci-dessus entre le noyau du complément de Schur et le second membre du système (6.2) grâce à la relation d'orthogonalité (6.6).

Nous allons maintenant montrer que la singularité du complément de Schur entraîne à son tour celle de la matrice grossière $C^T S C$.

Lemme 6.3. *Si le complément de Schur S est singulier alors la matrice $C^T S C$ est singulière. Si nous notons N le noyau de S et θ celui de $C^T S C$ alors nous avons*

$$N = C\theta$$

Démonstration :

La restriction de N à chaque sous-domaine est contenue dans le noyau local et peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$L_{\Gamma}^{(s)} N = z^{(s)} \theta^{(s)} \quad (6.9)$$

$L_{\Gamma}^{(s)}$ est l'opérateur de restriction au bord de chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$, $z^{(s)}$ une base du noyau local et $\theta^{(s)}$ les coefficients de combinaison. Soit $\{D^{(s)}\}_{s=1, N_s}$ une famille de poids formant une partition de l'unité :

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} = I. \quad (6.10)$$

Nous avons par définition du noyau N , de la partition de l'unité (6.10) et de l'égalité (6.9)

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} z^{(s)} \theta^{(s)} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} N = N. \quad (6.11)$$

Rappelons que nous avons $C = \begin{pmatrix} \dots & L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} z^{(s)} & \dots \end{pmatrix}$ et posons $\theta = \begin{pmatrix} \vdots \\ \theta^{(s)} \\ \vdots \end{pmatrix}$. L'égalité

(6.11) devient

$$C\theta = N. \quad (6.12)$$

En appliquant S à l'égalité ci-dessus, on obtient

$$SC\theta = SN = 0.$$

Nous avons finalement

$$C^T SC\theta = 0. \quad (6.13)$$

Pour que le système (5.9) admette une solution, il est nécessaire que son second membre soit orthogonal au noyau N . Supposons que cette hypothèse est vérifiée et observons le comportement de l'algorithme BDD. Nous avons

- Ajuster le résidu r en résolvant le système

$$(C^T SC)\lambda = C^T r. \quad (6.14)$$

Nous avons montré que la singularité de S impliquait celle de $C^T SC$. Le système (6.14) est toujours consistant et admet donc une solution à un élément du noyau de $C^T SC$ noté θ additif près. Les solutions de (6.14) s'écrivent d'une manière générale sous la forme $\lambda + \alpha\theta$ où α est une constante.

- Résoudre les problèmes de Neumann

$$S^{(s)} u^{(s)} = D^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} s, \quad s = r - SC(\lambda + \alpha\theta) = r - SC\lambda \quad (6.15)$$

Les systèmes (6.15) sont identiques à ceux de BDD pour les problèmes symétriques définis positifs et ne sont donc pas influencés par la singularité du complément de Schur S .

- Re-ajuster le résidu en résolvant le système

$$(C^T SC)\mu = C^T \left(r - S \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} \right) \quad (6.16)$$

Comme en (6.14) il y a existence de solutions de la forme $\mu + \alpha\theta$

- Prendre la somme pondérée des solutions sur l'interface

$$z = C(\alpha\theta + \mu) + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} = \alpha N + C\mu + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)} u^{(s)} \quad (6.17)$$

On voit apparaître dans (6.17) le noyau N qui peut faire diverger la méthode BDD appliquée aux problèmes singuliers. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes qui permettent d'adapter BDD à la résolution de problèmes globalement mal-posés.

6.2.2 Résolution de problèmes semi-définis positifs

On peut reformuler le système (6.2) comme un problème de minimisation d'énergie sous deux formes différentes ([7],[6]).

1. Minimisation sans contrainte

Soit $P_g = I - N(N^T N)^{-1} N^T$. Cette approche consiste à transformer le système (6.2) par projection et à résoudre le problème :

$$P_g^T S P_g U_{\Gamma} = P_g^T b. \quad (6.18)$$

Cette approche dont la difficulté principale est la détermination du noyau N est rarement utilisée. Nous venons de montrer en (6.9) que nous pouvons facilement reconstruire le noyau N par combinaison des noyaux locaux. Les coefficients de cette combinaison sont donnés par le noyau du problème grossier. La recherche des noyaux locaux est classique dans les méthodologies FETI et BDD. Le calcul du noyau de la matrice grossière peut se faire indifféremment de manière classique par une méthode directe ou par la méthode du gradient conjugué comme proposée par [65]. Le système (6.18) est bien posé et on peut lui appliquer la méthode BDD. La matrice grossière sera de la forme $P_g^T C^T S C P_g$ et coûteuse à assembler.

2. Minimisation sous contrainte

L'idée de cette méthode est d'imposer explicitement à la solution de (6.2) d'être orthogonale au noyau de S . La méthode de résolution de problèmes semi-définis positifs qui consiste à fixer la solution recherchée en un point est très populaire et appartient à cette classe [7]. Cette stratégie conduit à une matrice mal conditionnée et nous ne développons pas cette approche et renvoyons pour plus de détails à ([7], [6], [71]).

En revanche on peut maintenir l'algorithme BDD dans l'orthogonal de N grâce à la modification suivante sans dégrader sa vitesse de convergence :

Algorithme 6.1. *BDD pour les problèmes singuliers*

1. Résoudre le problème grossier

$$(C^T SC) \lambda = C^T r \quad (6.19)$$

2. Résoudre les problèmes de Neumann locaux

$$S^{(s)}u^{(s)} = D^{(s)}L_{\Gamma}^{(s)}(r - SC\lambda). \quad (6.20)$$

3. Résoudre le problème grossier

$$(C^T SC)\mu = -C^T S(u^+ - C\lambda), \quad u^+ = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)}u^{(s)}. \quad (6.21)$$

4. Projeter la somme pondérée sur les interfaces

$$z = P_g \left(\alpha N + C\mu + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D^{(s)}u^{(s)} \right). \quad (6.22)$$

6.3 Extension de BDD aux interfaces définies par intersection de paire de sous-domaines

L'algorithme du gradient conjugué ci-dessus présenté comporte deux éléments essentiels : Le calcul des produits matrices-vecteurs et le calcul des produits scalaires. Ces opérations sont précédées ou suivies d'assemblages de quantités entre les sous-domaines voisins. La phase d'assemblage nécessite une communication entre les sous-domaines voisins. Il faut donc définir pour chaque sous-domaine l'ensemble de ses voisins. La notion de voisins est liée à la topologie d'interfaces utilisée dans la méthode de décomposition de domaine. C'est l'une des différences entre la méthode FETI et la méthode du complément de Schur primal lorsque le découpage en sous-domaines introduit des points multiples. Deux sous-domaines ayant un point commun sont voisins dans la description géométrique de l'interface qui est utilisé dans la méthode du complément de Schur primal. En revanche, pour FETI, deux sous-structures sont voisines si leur intersection est de mesure non nulle c'est-à-dire une arête en dimension deux d'espace ou une face en dimension trois d'espace [32]. C'est une description par connectivité de l'interface. L'interface par connectivité fait

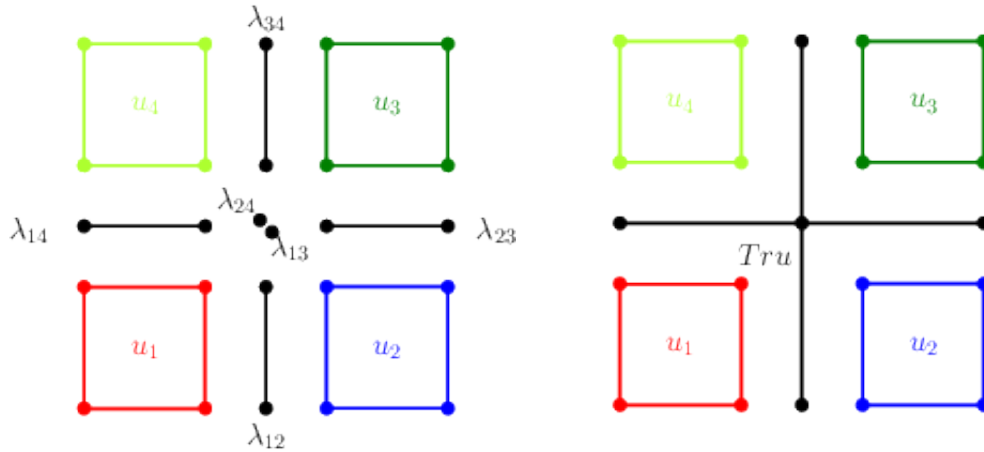


FIGURE 6.1 – Interface par connectivité utilisée dans FETI et interface géométrique utilisée dans BDD

apparaître des redondances pour les quantités primales en présence de points appartenant

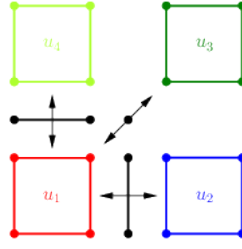


FIGURE 6.2 – Transfert et réception de données entre voisins

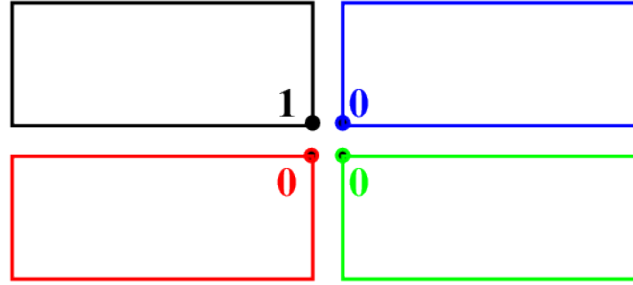


FIGURE 6.3 – Masquage lors du passage interface à sous-domaine

à plus de deux sous-domaines (points multiples) [32]. Nous devons éviter de prendre en compte plusieurs fois un même point lors de la mise en oeuvre de la méthode du gradient conjugué préconditionné notamment lors des opérations d'assemblages et de trace. L'une des stratégies s'appuie sur la notion de masquage que nous rappelons ci-dessous [32]. Ce risque de duplication disparaît dans la description géométrique de l'interface.

6.3.1 Echange entre sous-domaines voisins

Chaque sous-domaine envoie et reçoit différentes valeurs de ses voisins lorsque ces grandeurs dépendent du sous-domaine voisin au niveau des points multiples. Les grandeurs globales transférées ou reçues des voisins partageant un même point comme les points multiples sont identiques figure 6.2.

6.3.2 Passage interface sous-domaine

FETI et BDD traitent des grandeurs définies aux interfaces à partir desquelles on reconstruit des quantités internes à chaque sous-domaine. Il faut donc savoir transformer une grandeur interface en une grandeur définie dans le sous-domaine correspondant. Considérons la figure 6.3 où apparaît un point multiple. La définition d'une trace unique dans la méthode du complément de Schur primal et l'usage de l'interface géométrique déterminent les relevements locaux de manière unique (figure 6.4). En revanche le passage de l'interface par connectivité au sous-domaine est redondant au point de croisement. Nous obtiendrons en ce point trois multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{13}, \lambda_{12}, \lambda_{14}$ pour le sous-domaine 1 (figure 6.4). Cela ne pose pas de problème car ces grandeurs sont différentes. En revanche une quantité globale u_Γ tel que $u_{13} = u_{12} = u_{14} = u_\Gamma$ sera connue 3 fois donc dupliquée au niveau du point multiple. Le masquage consiste à annuler les deux valeurs supplémentaires (figure 6.3).

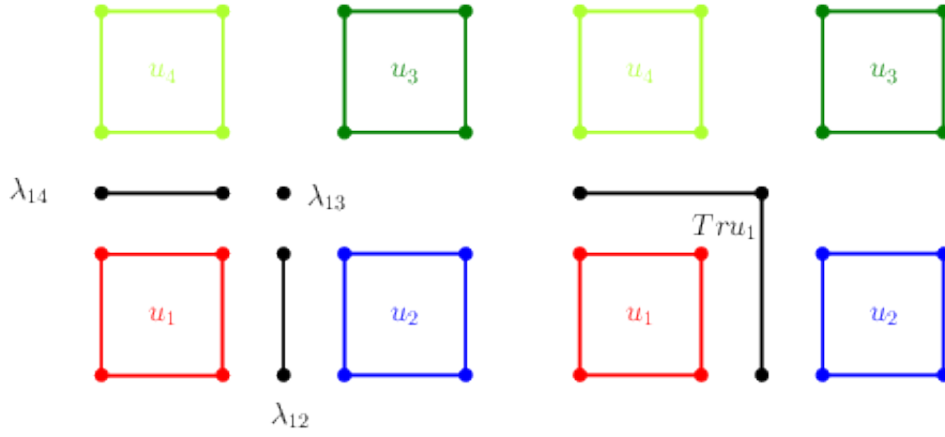


FIGURE 6.4 – Passage interface sous-domaine

6.3.3 Calcul du produit scalaire par assemblage et le non-assemblage

Supposons que $r_{\Gamma}^{(s)}$ correspond à la contribution du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ au vecteur r . Par exemple,

$$r_{\Gamma} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} r_{\Gamma}^{(s)}.$$

Le produit scalaire $r_{\Gamma}^T z_{\Gamma}$ peut être évalué comme suit :

$$r_{\Gamma}^T z_{\Gamma} = \sum_{s=1}^{N_s} r_{\Gamma}^{(s)T} (L_{\Gamma}^{(s)} z_{\Gamma}).$$

Rappelons que $L_{\Gamma}^{(s)} z_{\Gamma}$ est la localisation à l'interface de la sous-structure $\Omega^{(s)}$ du vecteur interface assemblé global z_{Γ} . Ainsi le produit scalaire $r_{\Gamma}^T z_{\Gamma}$ est évalué comme la somme de produits scalaires partiels entre un vecteur assemblé et un autre non assemblé.

6.3.4 Suppression de la redondance dans le cas du produit scalaire de deux vecteurs

Nous pouvons écrire le calcul du produit scalaire de deux vecteurs interfaces r_{Γ} et z_{Γ} comme

$$r_{\Gamma}^T z_{\Gamma} = \sum_{s=1}^{N_s} (L_{\Gamma}^{(s)} r_{\Gamma})^T (L_{\Gamma}^{(s)} z_{\Gamma})$$

où $L_{\Gamma}^{(s)} z_{\Gamma}$ est la localisation à l'interface de la sous-structure $\Omega^{(s)}$ du vecteur interface z_{Γ} . L'évaluation de cette somme sur l'interface par connectivité prend en compte plusieurs fois des termes identiques aux points multiples lorsque les vecteurs r_{Γ} et z_{Γ} sont définis globalement. Le masquage de l'un de ces vecteurs suffit pour éliminer les termes redondants.

6.3.5 Suppression de la redondance dans le cas de la base C

La matrice du problème grossier est une matrice bloc de la forme

$$C^T SC = \begin{pmatrix} z^{(1)T} D^{(1)} L_\Gamma^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(N_s)T} D^{(N_s)} L_\Gamma^{(N_s)} \end{pmatrix} \left(\sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} S^{(s)} L_\Gamma^{(s)} \right) \left(L_\Gamma^{(1)T} D^{(1)} z^{(1)} \dots L_\Gamma^{(N_s)T} D^{(N_s)} z^{(N_s)} \right).$$

La matrice $C^T SC$ est creuse, avec des blocs nuls correspondant aux sous-domaines qui n'ont aucun sous-domaine voisin commun. On peut la construire en utilisant des produits scalaires et des produits matrices-vecteurs de la forme $S L_\Gamma^{(s)T} D^{(s)} z^{(s)}$. De plus, ces produits matrices-vecteurs peuvent être calculés en utilisant uniquement les compléments de Schur des sous-domaines voisins au sous-domaine $\Omega^{(s)}$. Les produits scalaires intervenant dans la formation de la matrice $C^T SC$ peuvent également être restreints de la même façon aux sous-domaines voisins [54]. Chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$ devra donc transférer sa base $D^{(s)} z^{(s)}$ à ses voisins.

Outre le cas d'une décomposition en bande, l'utilisation de plus de 2 sous-domaines conduit à l'apparition des points multiples, points appartenant à plus de 2 sous-structures. Ces points entraînent la coexistence de deux topologies d'interface [38] :

- une interface géométrique construite à partir d'intersections et d'unions de frontières de sous-domaines. C'est cette description d'interface qui est utilisée dans la méthode du complément de Schur primale,
- une interface formée de l'ensemble des interfaces entre paires de sous-domaines associée à la méthode FETI.

Nous venons de voir que la formation de la matrice grossière de BDD se fait par l'application des compléments de Schur locaux aux noyaux pondérés de ses voisins et par le calcul des produits scalaires locaux prenant en compte les noyaux des sous-domaines voisins. Tous les sous-domaines voisins disposent donc des mêmes modes à énergie nulle aux interfaces qui les séparent. Ces modes sont en un certain sens assemblés ou globaux et on a précédemment vu que l'interface par connectivité faisait apparaître des redondances aux points multiples lors du passage d'une interface au sous-domaine correspondant pour les grandeurs globalement définies. On peut supprimer cette redondance dans la base de l'espace grossier par le masquage. Le calcul de produits scalaires par la technique où l'un des vecteurs est non assemblé et l'autre vecteur assemblé masqué a pour conséquence de ne pas assembler les compléments de Schur locaux lors de la formation de la matrice grossière de BDD.

6.3.6 Statuts des principales composantes de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné par BDD

Nous indiquons dans le tableau 6.1 les statuts des différents vecteurs intervenant dans l'algorithme du gradient conjugué préconditionné par la méthode BDD.

6.4 conclusion

La méthode BDD est une méthode de sous-structure initialement conçue pour les problèmes elliptiques et qui a été étendue à d'autres problèmes à cause de son efficacité. Ses extensions échappent aux problèmes semi-définis positifs pourtant présents dans plusieurs

	assemblage	masquage
u	assemblé	masqué
z	assemblé	masqué
w	assemblé	masqué
y	assemblé	masqué
C	assemblé	masqué
g	assemblé	masqué
$g^{(s)}$	non-assemblé	non-masqué
$S^{(s)}w$	non-assemblé	non-masqué

TABLE 6.1 – statuts des vecteurs primaux sur l'interface FETI

applications et algorithmes. Nous avons adapté l'algorithme BDD pour résoudre les problèmes globalement mal posés. Cette adaptation repose sur la reconstruction du noyau du complément de Schur assemblé qui permet de maintenir l'algorithme dans l'image du complément de Schur assemblé par projection. La similitude entre FETI et BDD est connue depuis plusieurs années. Nous les avons encore rapprochées en montrant qu'une définition unique de l'interface peut leur être appliquée. Cette interface est déterminée par intersection de paire de sous-domaines qui est déjà utilisée en FETI avec des redondances aux points multiples. Nous avons utilisé une méthode qui permet de supprimer les termes répétitifs dans la méthode du gradient conjugué préconditionné par BDD. Il suffit de calculer les produits en ayant l'un des facteurs assemblés et masqués en conservant l'autre facteur non assemblé et non masqué.

Chapitre 7

Combinaison de la méthode FETI et de la méthode BDD pour la résolution de stokes avec la pression continue aux interfaces

7.1 Introduction

L'analyse par éléments finis mixtes du problème de Stokes incompressible est bien connue d'être difficile. La complexité vient de la condition de compatibilité, la condition inf-sup nécessaire à la stabilité de la méthode que doivent vérifier les espaces d'approximation de la vitesse et de la pression. L'analyse numérique d'une approximation continue de la pression accentue d'autant plus les difficultés que les méthodes utilisées et étudiées sont souvent basées sur une approximation discontinue de la pression. IL est en effet possible de combiner les méthodes de pénalisation et les solveurs directs pour résoudre efficacement le système linéaire issu d'une discrétisation discontinue en pression [1]. Néanmoins, ces méthodes peuvent facilement devenir instables et l'on doit recourir à une technique de stabilisation en ajoutant des degrés de liberté à l'espace de la vitesse afin de satisfaire la condition de stabilité LBB. Les degrés de liberté supplémentaires complexifient ces méthodes sans améliorer la précision de la solution [10].

D'un point de vue ingénieur, les pressions continues sont plus naturelles car les pressions rencontrées en pratique sont souvent des fonctions continues [36]. De plus, les méthodes itératives pour la résolution d'un système issu d'une discrétisation de l'équation de Stokes avec des éléments finis mixtes continus en pression sont efficaces et présentent des avantages évidents. Une pression continue réduit la dimension de l'espace de pression et conduit par conséquent à un système linéaire plus petit à résoudre [10]. La stabilité est meilleure et les degrés de liberté de stabilisation sont moins nécessaires ; ce qui confirme la réduction de la taille du système linéaire et les coûts de calcul et simplifie la résolution. Ces avantages sont très importants en dimension \mathbb{R}^3 où on utilise souvent les méthodes itératives pour résoudre les problèmes d'éléments finis. Parmi ces méthodes, la méthode de décomposition de domaine s'impose de plus en plus avec l'accroissement incessant de la taille des problèmes à résoudre et le développement du calcul parallèle. En effet, les systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations aux dérivées partielles dans les applications pratiques sont de grande dimension. Une factorisation directe de tels systèmes n'est pas envisageable et les méthodes itératives classiques telles que l'algorithme du gradient

conjugué convergent lentement [71]. L'idée principale de la méthode de décomposition de domaine est d'éviter de résoudre directement les problèmes de grande dimension mais de se ramener à la résolution de sous-problèmes. La technique consiste à reformuler le problème d'origine en un système équivalent constitué d'un ensemble de sous-problèmes couplés par les conditions de transmission appropriées. Notre étude sera basée sur la méthode du complément de Schur primal Balancing Domain decomposition (BDD) [54] et de la méthode FETI [32],[31].

Dans le cas de la discrétisation du problème de Stokes avec des éléments finis mixtes continus en pression, on doit considérer la pression comme une inconnue d'interface, le problème d'interface est alors posé sur une inconnue vitesse et pression. Si on envisage la résolution par une approche primale, l'inconnue à l'interface sera une vitesse et une pression. La méthode FETI quant à elle considérerait un effort et un flux de vitesse comme inconnus. Dans ces méthodes classiques l'inconnue est hétérogène au sens de ses dimensions physiques et conduit à un problème mal conditionné très défavorable aux méthodes itératives. Une possibilité d'obtenir un problème à inconnues homogènes au sens de leurs dimensions physiques et par conséquent plus favorable aux méthodes itératives consiste à fusionner la méthode du complément de Schur primal et FETI. L'idée de combiner les méthodes du complément de Schur FETI et BDD ont déjà été utilisée dans [26, 28, 38]. L'objectif est donc de proposer une nouvelle méthode de résolution par décomposition de domaine qui permet un traitement différencié des degrés de liberté de vitesse et de pression. Il est en effet possible de séparer le problème, sans le découpler, en un système en vitesse traité par une méthode duale et un problème en pression résolu par une approche primale. Nous envisagerons aussi le traitement primal de la vitesse et dual de la pression. Ce qui nous permettra de proposer un préconditionneur optimal pour chacune des méthodes. Les premiers résultats de ce travail sont acceptés pour publication dans [73]. Nous rappelons la méthode FETI-DP dans la section 7.2 suivi d'un rappel sur le système de Stokes dans la section 7.3 puis de l'introduction de la méthode hybride dans la section 7.4.

7.2 La méthode dual-primal FETI

Nous avons présenté dans des chapitres précédents la méthode du complément de Schur dual (FETI) et la méthode du complément de Schur primal BDD. Ces méthodes sont très efficaces et extensibles lorsqu'elles sont appliquées aux systèmes linéaires issus d'une discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques de second ordre. FETI et BDD sont moins efficaces pour la résolution de systèmes linéaires issus de la discrétisation des problèmes d'ordre quatre. FETI-DP et BDDC sont deux extensions de FETI et BDD adaptées aux problèmes d'ordre quatre [25, 21]. Elles préservent les performances de FETI et BDD tout en ayant de matrices grossières creuses et de petite taille. La stratégie de FETI-DP consiste à mélanger la méthode FETI et la méthode du complément de Schur primal. On introduit des multiplicateurs de Lagrange pour assurer la continuité de la majeure partie des degrés de liberté interfaces comme dans FETI. Les autres degrés de liberté sont traités de manière primale et sont éliminés après une condensation pour former un problème grossier nécessaire pour rester extensible. Les degrés de liberté primaux dans FETI-DP sont en général choisis comme les points multiples. Les coins seuls comme inconnus du problème grossier ne suffisent pas pour garantir l'extensibilité en dimension 3 d'espace [25, 21, 48]. Il faut en plus ajouter au problème grossier les moyennes sur les arêtes ou sur les faces pour être efficaces. Nous avons précédemment fait une présentation sommaire de FETI-DP en considérant deux sous-domaines. Nous étendons ici cette

présentation pour une décomposition en plusieurs sous-domaines en nous limitant au cas où seuls les points multiples constituent les inconnus du problème grossier. Nous revenons à la résolution du système linéaire (4.1)

$$Ku = f.$$

Nous supposons que le domaine du problème Ω est partitionné en N_s sous-domaines $\Omega^{(s)}$ d'interface Γ_I . Nous notons $K^{(s)}$, $u^{(s)}$ et $f^{(s)}$ la matrice de rigidité, le déplacement et le second membre associés au sous-domaine $\Omega^{(s)}$.

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{i\Gamma}^{(s)} \\ K_{\Gamma i}^{(s)T} & K_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, u^{(s)} = \begin{pmatrix} u_i^{(s)} \\ u_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, f^{(s)} = \begin{pmatrix} f_i^{(s)} \\ f_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Nous partitionnons les degrés de liberté locaux en inconnus primaux indicés par c et en inconnus duaux d'indice r comme

$$u_{\Gamma}^{(s)} = \begin{pmatrix} u_{\Gamma_r}^{(s)} \\ u_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

FETI-DP consiste à imposer la continuité des inconnus primaux au sens fort en les définissant au niveau global et à imposer la continuité des inconnus duaux par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange comme dans FETI. Cette procédure introduit un découpage de la matrice de rigidité locale $K^{(s)}$, le déplacement local $u^{(s)}$ et la force locale $f^{(s)}$ sous la forme :

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{rr}^{(s)} & K_{rc}^{(s)} \\ K_{rc}^{(s)T} & K_{cc}^{(s)} \end{pmatrix}, u^{(s)} = \begin{pmatrix} u_r^{(s)} \\ u_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}, f^{(s)} = \begin{pmatrix} f_r^{(s)} \\ f_{\Gamma_c}^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

avec

$$u_r^{(s)} = \begin{pmatrix} u_i^{(s)} \\ u_{\Gamma_r}^{(s)} \end{pmatrix}, f_r^{(s)} = \begin{pmatrix} f_i^{(s)} \\ f_{\Gamma_r}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

On introduit aussi le vecteur global

$$u_c = \begin{pmatrix} u_{\Gamma_c}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{\Gamma_c}^{(j)} \\ \vdots \\ u_{\Gamma_c}^{(N_c)} \end{pmatrix}.$$

$u_{\Gamma_c}^{(j)}$ est un degré de liberté associé au j^{ieme} noeud global qui est en même temps un point multiple, et N_c le nombre total de coins. On introduit d'autres matrices booléennes $T_r^{(s)}$ et $T_c^{(s)}$ par

$$T_r^{(s)} u_r^{(s)} = \pm u_{\Gamma_r}^{(s)} \quad \text{et} \quad T_c^{(s)} u_c = u_{\Gamma_c}^{(s)}.$$

Avec ces notations les équations d'équilibre locales deviennent les équations d'équilibre par sous-domaine et la condition de continuité à l'interface deviennent :

$$K_{rr}^{(s)} u_r^{(s)} + K_{rc}^{(s)} T_c^{(s)} u_c + T_r^{(s)T} \lambda = f_r^{(s)}, \quad (7.3)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} T_c^{(s)T} K_{rc}^{(s)T} u_r^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_s} T_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} T_c^{(s)} u_c = \sum_{s=1}^{N_s} T_c^{(s)T} f_{\Gamma_c}^{(s)} = f_c, \quad (7.4)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} T_r^{(s)} u_r^{(s)} = 0. \quad (7.5)$$

Le choix des degrés de liberté primaux dépend des problèmes et est fait de manière à assurer l'inversibilité des matrices locales $K_{rr}^{(s)}$ et de la matrice assemblée $K_{cc} = \sum_{s=1}^{N_s} T_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} T_c^{(s)}$. On peut donc éliminer les déplacements duaux dans les équations (7.3)

$$u_r^{(s)} = K_{rr}^{(s)-1} \left(f_r^{(s)} - K_{rc}^{(s)} T_c^{(s)} u_c - T_r^{(s)T} \lambda \right) \quad (7.6)$$

La substitution de l'expression (7.6) de $u_r^{(s)}$ dans les équations (7.4) et (7.5) conduit au système :

$$\begin{pmatrix} F_{I_{rr}} & F_{I_{rc}} \\ F_{I_{rc}}^T & -K_{cc}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_r \\ -f_c^* \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

où

$$\begin{aligned} F_{I_{rr}} &= \sum_{s=1}^{N_s} T_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} T_r^{(s)T}, \\ F_{I_{rc}} &= \sum_{s=1}^{N_s} T_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} K_{rc}^{(s)} T_c^{(s)}, \\ K_{cc}^* &= K_{cc} - \sum_{s=1}^{N_s} \left(K_{rc}^{(s)} T_c^{(s)} \right)^T K_{rr}^{(s)-1} \left(K_{rc}^{(s)} T_c^{(s)} \right), \\ d_r &= \sum_{s=1}^{N_s} T_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)}, \\ f_c^* &= f_c - \sum_{s=1}^{N_s} T_c^{(s)T} K_{rc}^{(s)T} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)}. \end{aligned}$$

Le système d'interface (7.7) est un problème mixte posé à la fois en inconnus primaux et duaux. On retrouve un système linéaire symétrique défini positif par élimination des inconnus primaux

$$\left(F_{I_{rr}} + F_{I_{rc}} K_{cc}^{*-1} F_{I_{rc}}^T \right) \lambda = d_r - F_{I_{rc}} K_{cc}^{*-1} f_c^*. \quad (7.8)$$

Le problème ci-dessus est résolu par la méthode du gradient conjugué muni des préconditionneurs Dirichlet ou lumped comme dans FETI.

Un système d'interface mélangeant des inconnus primaux et duaux apparaît aussi dans la méthode de décomposition de domaine hybride introduite par [38, 39]. La méthode hybride applique la méthode FETI à trois champs appelée A-FETI à une partie des inconnus interfaces et la méthode du complément de Schur primal à l'ensemble des degrés de liberté restants. Le préconditionneur local est une somme pondérée d'opérateurs locaux qui intervertissent la nature primale ou duale des degrés de liberté interfaces. Le préconditionneur grossier nécessaire à l'extensibilité de la méthode est basée sur les méthodes de Krylov augmentées, la méthode de projection encore appelée deflation. Une méthode de sous-structuration adaptée à la résolution du système linéaire issu de la discrétisation de Stokes avec les éléments de Hood-Taylor a été introduite par [75]. Les auteurs ont appliqué la méthode FETI-DP à la vitesse et la méthode du complément de Schur primal à la pression. La méthode que nous allons introduire pour la résolution de problèmes mixtes est une combinaison de la méthode FETI à un champ et la méthode BDD. Les préconditionneurs locaux consisteront à résoudre un problème de Dirichlet en vitesse et un problème de Neumann en pression. Ce sont les matrices où les blocs sont de même forme

que les opérateurs locaux qui découlent de l'application de FETI à la pression et BDD à la vitesse. Les blocs diagonaux sont identiques mais les blocs extra-diagonaux sont quant à eux opposés.

7.3 Le système de Stokes

Considérons l'équation de Stokes incompressible homogène dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.9)$$

Étant donnés deux espaces $V \subset H_0^1(\Omega)^3$ et $Q \subset L^2(\Omega)$, la formulation variationnelle du problème (7.9) préalable à une discrétisation par éléments finis s'écrit : Trouver $(u, p) \in V \times Q$ tel que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx, & \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx = 0, & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (7.10)$$

L'approximation par éléments finis mixtes du problème (7.10) consiste à trouver $u_h \in V_h$, $p_h \in Q_h$ tels que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(p_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{V, V'}, & \forall v_h \in V_h, \\ b(q_h, u_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \quad (7.11)$$

où V_h et Q_h sont des espaces de dimensions finies tels que $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ et

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx \quad \text{et} \quad b(q_h, v_h) = - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h dx.$$

Nous avons précédemment évoqué la diversité du choix du couple (V_h, Q_h) destiné à approcher le couple (V, Q) . Pour des raisons déjà mentionnées, nous choisissons une approximation continue en vitesse et en pression. La résolution par décomposition en deux sous-problèmes du système matriciel associé à (7.11) s'écrit comme nous allons voir sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & 0 & A_{i3}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} & 0 & B_{3i}^{(1)T} \\ 0 & A_{ii}^{(2)} & A_{i3}^{(2)} & 0 & B_{ii}^{(2)T} & B_{3i}^{(s)T} \\ A_{3i}^{(1)} & A_{3i}^{(2)} & A_{33} & B_{i3}^{(1)T} & B_{i3}^{(2)T} & B_{33}^T \\ B_{ii}^{(1)} & 0 & B_{i3}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{ii}^{(2)} & B_{i3}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ B_{3i}^{(1)} & B_{3i}^{(2)} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ U_i^{(2)} \\ U_3 \\ P_i^{(1)} \\ P_i^{(2)} \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ F_i^{(2)} \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Nous avons expliqué plus haut que les méthodes de décomposition de domaine classiques pour la résolution du système (7.12) conduiraient à un problème d'interface mal conditionné et présenteraient donc l'inconvénient majeur d'avoir une convergence très lente. Nous développons dans ce travail une nouvelle méthode de sous-structuration en combinant la méthode FETI et la méthode BDD afin d'améliorer la convergence de la résolution du problème (7.12) par une méthode itérative.

7.4 Présentation de la méthode du complément de Schur hybride pour l'équation de Stokes

Nous proposons dans cette méthode un traitement différencié des degrés de liberté de la vitesse et de la pression. Dans un premier temps, nous allons traiter la vitesse par une méthode duale (FETI) et la pression par une méthode primale (BDD). L'inconnue du problème d'interface sera homogène à une force et le problème interface aura de meilleures propriétés. Dans un second temps, nous introduirons un multiplicateur de Lagrange pour assurer la continuité faible de la pression comme dans FETI alors que la continuité de la vitesse sera imposée de façon forte comme dans BDD. Cette deuxième approche conduira à un problème d'interface dont les inconnues sont la vitesse et sa composante normale, le multiplicateur de Lagrange qui assure la continuité faible de la pression est continue aux interfaces. Cette méthode est donc particulièrement adaptée pour la résolution des systèmes issus d'une formulation mixte des problèmes elliptiques où la continuité de la vitesse normale est requise. On rencontre fréquemment ce type de problèmes lors de la résolution du système de Darcy en milieux poreux. Nous appellerons la première méthode duale-primale et la seconde primale-duale. La méthode proposée par [15] relâche la continuité de la pression entre les sous-domaines. Elle ne contrôle pas le saut engendré par cette discontinuité qui persiste à convergence. Dans la méthode primale-duale la pression est discontinue au cours des itérations et devient continue à convergence. Nous avons ainsi relâché la contrainte de continuité de la pression au travers des interfaces au cours des itérations mais nous en contrôlons le saut à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

7.4.1 La méthode du complément de Schur hybride duale-primale

Considérons la décomposition du domaine Ω en N sous-domaines sans recouvrement

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^{N_s} \Omega^{(s)}, \Gamma = \bigcup_{s,r=1}^{N_s} \partial\Omega^{(s)} \cap \partial\Omega^{(r)}.$$

Nous définissons les espaces suivants :

$$\mathcal{V}_h^{(s)} = \left\{ v_h^{(s)} \in \left(H^1 \left(\Omega^{(s)} \right) \right)^2 \mid v_h^{(s)} = v_h|_{\Omega^{(s)}} \text{ pour un } v_h \in V_h \right\}, \quad 1 \leq s \leq N_s,$$

$$\mathcal{Q}_h^{(s)} = \left\{ q_h^{(s)} \in L^2 \left(\Omega^{(s)} \right) \mid q_h^{(s)} = q_h|_{\Omega^{(s)}} \text{ pour un } q_h \in Q_h \right\}, \quad 1 \leq s \leq N_s.$$

Cas d'une décomposition en deux sous-domaines

Supposons dans un premier temps que le domaine Ω est décomposé en deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ comme sur la figure ci-dessous. Nous numérotions les degrés de liberté en commençant par le sous-domaine $\Omega^{(1)}$ puis le sous-domaine $\Omega^{(2)}$ et enfin les inconnues interfaces que nous indiquerons par 3. Notons $\bar{\mathcal{V}}_h^{(s)}$ et $\bar{\mathcal{Q}}_h^{(s)}$ les sous-espaces des fonctions de $\mathcal{V}_h^{(s)}$ et $\mathcal{Q}_h^{(s)}$ s'annulant sur la frontière Γ . Enfin, $\bar{\mathcal{V}}_{h,3}$ et $\bar{\mathcal{Q}}_{h,3}$ sont les espaces engendrés par les fonctions de base correspondant aux noeuds de l'interface. Les espaces V_h et Q_h se décomposent ainsi en

$$V_h = \bar{\mathcal{V}}_h^{(1)} \oplus \bar{\mathcal{V}}_h^{(2)} \oplus \bar{\mathcal{V}}_{h,3} \quad \text{et} \quad Q_h = \bar{\mathcal{Q}}_h^{(1)} \oplus \bar{\mathcal{Q}}_h^{(2)} \oplus \bar{\mathcal{Q}}_{h,3}.$$

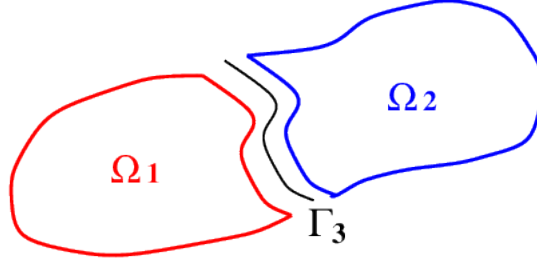


FIGURE 7.1 – Décomposition du domaine en deux sous-domaine

Nous décomposons les inconnues suivant la forme de V_h et celle de Q_h ci-dessus et nous ordonnons les inconnues en commençant par les inconnues internes comme dans les méthodes de sous-structuration classiques. Le problème (7.12) devient :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} & 0 & 0 & A_{i3}^{(1)} & B_{3i}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & B_{i3}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} & A_{i3}^{(2)} & B_{3i}^{(2)T} \\ 0 & 0 & B_{ii}^{(2)} & 0 & B_{i3}^{(2)} & 0 \\ A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} & A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} & A_{33} & B_{33}^T \\ B_{3i}^{(1)} & 0 & B_{3i}^{(2)} & 0 & B_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \\ U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \\ U_3 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ 0 \\ F_i^{(2)} \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

En développant le problème (7.13) , on obtient :

Le système de Stokes local au sous-domaine $\Omega^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{i3}^{(1)} \\ B_{i3}^{(1)} \end{pmatrix} U_3 + \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)T} \\ 0 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

Le système de Stokes local au sous-domaine $\Omega^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{i3}^{(2)} \\ B_{i3}^{(2)} \end{pmatrix} U_3 + \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)T} \\ 0 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} F_i^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

Le système de Stokes à l'interface

$$\begin{pmatrix} A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \end{pmatrix} + A_{33}U_3 + B_{33}^T P_3 = F_3. \quad (7.16)$$

L'incompressibilité

$$\begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \end{pmatrix} + B_{33}U_3 = 0. \quad (7.17)$$

Les problèmes locaux (7.14) et (7.15) sont bien posés [15], [62]. Nous pouvons donc exprimer les inconnues internes en fonction des inconnues interfaces comme

$$\begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{i3}^{(1)} \\ B_{i3}^{(1)} \end{pmatrix} U_3 - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)T} \\ 0 \end{pmatrix} P_3 \right), \quad (7.18)$$

$$\begin{pmatrix} U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} F_i^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{i3}^{(2)} \\ B_{i3}^{(2)} \end{pmatrix} U_3 - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)T} \\ 0 \end{pmatrix} P_3 \right). \quad (7.19)$$

En utilisant les expressions (7.18) et (7.19) de $\begin{pmatrix} U_i^{(1)} \\ P_i^{(1)} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} U_i^{(2)} \\ P_i^{(2)} \end{pmatrix}$, on peut éliminer les inconnues internes dans les équations d'interface (7.16) qui deviennent

$$\begin{aligned} & \left(A_{33} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(1)} \\ B_{i3}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(2)} \\ B_{i3}^{(2)} \end{pmatrix} \right) U_3 + \\ & \left(B_{33}^T - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)T} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)T} \\ 0 \end{pmatrix} \right) P_3 = \\ & F_3 - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.20)$$

alors que les équations d'incompressibilité (7.17) se transforment en

$$\begin{aligned} & \left(B_{33} - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(1)} \\ B_{i3}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(2)} \\ B_{i3}^{(2)} \end{pmatrix} \right) U_3 - \\ & \left(\begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)T} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)T} \\ 0 \end{pmatrix} \right) P_3 = \\ & - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} \\ B_{ii}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Les équations ci-dessus suggèrent l'introduction des matrices suivantes afin de simplifier l'écriture

$$\begin{aligned} M_{uu}^{(s)} &= A_{33}^{(s)} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(s)} & B_{i3}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(s)} \\ B_{i3}^{(s)} \end{pmatrix}, \\ M_{up}^{(s)} &= B_{33}^{(s)T} - \begin{pmatrix} A_{3i}^{(s)} & B_{i3}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ M_{pu}^{(s)} &= B_{33}^{(s)} - \begin{pmatrix} B_{3i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i3}^{(s)} \\ B_{i3}^{(s)} \end{pmatrix}, \\ M_{pp}^{(s)} &= \begin{pmatrix} B_{3i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{3i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous introduisons de même les seconds membres suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{(s)} &= \begin{pmatrix} B_{3i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_3^{(1)} + F_3^{(2)} &= F_3 \\ \tilde{F}_3^{(s)} &= F_3^{(s)} - \tilde{F}^{(s)} \end{aligned}$$

Avec cette notation, les équations (7.20) et (7.21) deviennent

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(1)} & M_{uu}^{(2)} \\ M_{pu}^{(1)} & M_{pu}^{(2)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} M_{up}^{(1)} & M_{up}^{(2)} \\ M_{pp}^{(1)} & M_{pp}^{(2)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{pu}^{(1)} & M_{pu}^{(2)} \end{pmatrix} & - \begin{pmatrix} M_{pp}^{(1)} & M_{pp}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_3^{(1)} & \tilde{F}_3^{(2)} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \tilde{F}^{(2)} & \tilde{F}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Posons

$$K = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} & 0 & 0 & A_{i3}^{(1)} & B_{3i}^{(1)T} \\ B_{ii}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & B_{i3}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ii}^{(2)} & B_{ii}^{(2)T} & A_{i3}^{(2)} & B_{3i}^{(2)T} \\ 0 & 0 & B_{ii}^{(2)} & 0 & B_{i3}^{(2)} & 0 \\ A_{3i}^{(1)} & B_{i3}^{(1)T} & A_{3i}^{(2)} & B_{i3}^{(2)T} & A_{33} & B_{33}^T \\ B_{3i}^{(1)} & 0 & B_{3i}^{(2)} & 0 & B_{33} & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & A_{i3}^{(s)} & B_{3i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & B_{i3}^{(s)} & 0 \\ A_{3i}^{(s)} & B_{i3}^{(s)T} & A_{33} & B_{33}^T \\ B_{3i}^{(s)} & 0 & B_{33} & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}, \quad S^{(s)} = \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)} & M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} & -M_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2.$$

On peut montrer que la matrice $S^{(s)}$ est le complément de Schur de la matrice $K^{(s)}$ par une condensation à l'interface. La matrice du système (7.22) est identique au complément de Schur S . Le système (7.22) résulte de la condensation à l'interface du système (7.13) dont K est la matrice. La matrice S est donc le complément de Schur de la matrice globale K et elle est la somme des compléments de Schur associés aux matrices locales $K^{(s)}$.

La matrice $K^{(s)}$ possède un noyau en vitesse lorsqu'elle dérive de la discrétisation de Stokes avec une condition au bord de Neumann et nous avons

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & A_{i3}^{(s)} & B_{3i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & B_{i3}^{(s)} & 0 \\ A_{3i}^{(s)} & B_{i3}^{(s)T} & A_{33} & B_{33}^T \\ B_{3i}^{(s)} & 0 & B_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_I^{(s)} \\ 0 \\ R_3^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons précédemment montré que la singularité d'une matrice implique celle de son complément de Schur. La trace à l'interface du noyau de la matrice est le noyau du complément de Schur associé. Nous avons donc

$$\begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)} & M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} & -M_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_3^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

La deuxième ligne de l'égalité (7.23) s'écrit $M_{pu}^{(s)} R_3^{(s)} = 0$. Nous venons de montrer que

$$M_{pu}^{(s)} \left(\ker \left(M_{uu}^{(s)} \right) \right) = \left\{ M_{pu}^{(s)} v^{(s)}, v^{(s)} \in \ker \left(M_{uu}^{(s)} \right) \right\} = \{0\}. \quad (7.24)$$

Lemme 7.1. *Les compléments de Schur $M_{pp}^{(s)}$ et $M_{uu}^{(s)}$ sont symétriques, semi-définis positifs en général.*

Démonstration :

Les matrices $M_{pp}^{(s)}$ sont clairement symétriques et les systèmes (7.14) et (7.15) sont bien posés [15], [62]. Donc, pour tout $P_3^{(s)}$, il existe

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{i3}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} P_3^{(s)}.$$

Par l'élimination de Gauss, nous avons

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{3i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ B_{3i}^{(s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \\ P_3^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pp}^{(s)} P_3^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Donc,

$$\begin{aligned} -P_3^{(s)T} M_{pp}^{(s)} P_3^{(s)} &= \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \\ P_3^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{3i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ B_{3i}^{(s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \\ P_3^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= U_i^{(s)T} A_{ii}^{(s)} U_i^{(s)} + 2P_i^{(s)T} B_{ii}^{(s)} U_i^{(s)} + 2P_3^{(s)T} B_{3i}^{(s)} U_i^{(s)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

De (7.25), nous avons

$$B_{ii}^{(s)} U_i^{(s)} = 0 \quad \text{et} \quad B_{3i}^{(s)} U_i^{(s)} = -M_{pp}^{(s)} P_3^{(s)}.$$

Alors de (7.26) et de la positivité de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur de Laplace par éléments finis, nous avons

$$P_3^{(s)T} M_{pp}^{(s)} P_3^{(s)} = U_i^{(s)T} A_{ii}^{(s)} U_i^{(s)} \geq 0.$$

Nous avons aussi

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{3i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ B_{3i}^{(s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_i^{(s)} \\ 1_3^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

où $1_i^{(s)}$ et $1_3^{(s)}$ sont des constantes dans les sous-domaines $\Omega^{(s)}$ et au bord respectivement. $M_{pp}^{(s)}$ est le complément de Schur de la matrice opérante ci-dessus. Nous avons montré que lorsqu'une matrice est singulière, son complément de Schur l'est aussi et a pour noyau la trace du noyau de la matrice à laquelle elle est associée. Donc, en toute généralité $M_{pp}^{(s)}$ peut être singulière ayant pour noyau la constante. Le complément de Schur $M_{pp}^{(s)}$ est défini positif sur le complémentaire de son noyau c'est-à-dire sur l'ensemble des pressions à moyenne nulle.

Les compléments de Schur $M_{uu}^{(s)}$ sont symétriques semi-définis positifs en général. Ils sont définis positifs en présence de conditions au bord de type Dirichlet [51].

Nous allons résoudre le système (7.22) par une méthode de sous-structuration en appliquant FETI à la vitesse et la méthode du complément de Schur primal à la pression sans découpler la vitesse et la pression. La formulation de la méthode FETI pour la vitesse introduit un multiplicateur de Lagrange λ qui permet d'assurer la continuité faible de la vitesse au travers de l'interface et transforme le système (7.22) en

$$\begin{pmatrix} M_{uu}^{(1)} & 0 & M_{up}^{(1)} & 1 \\ 0 & M_{uu}^{(2)} & M_{up}^{(2)} & -1 \\ M_{pu}^{(1)} & M_{pu}^{(2)} & -(M_{pp}^{(1)} + M_{pp}^{(2)}) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3^{(1)} \\ U_3^{(2)} \\ P_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_3^{(1)} \\ \tilde{F}_3^{(2)} \\ -(\tilde{F}^{(2)} + \tilde{F}^{(2)}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

En choisissant une méthode primale pour la pression, nous avons imposé une pression unique P_3 à l'interface entre les sous-domaines voisins. Le système (7.28) se décompose en

$$M_{uu}^{(1)} U_3^{(1)} + M_{up}^{(1)} P_3 + \lambda = \tilde{F}_3^{(1)}, \quad (7.29)$$

$$M_{uu}^{(2)} U_3^{(2)} + M_{up}^{(2)} P_3 - \lambda = \tilde{F}_3^{(2)}, \quad (7.30)$$

$$M_{pu}^{(1)} U_3^{(1)} + M_{pu}^{(2)} U_3^{(2)} - (M_{pp}^{(1)} + M_{pp}^{(2)}) P_3 = -(\tilde{F}^{(1)} + \tilde{F}^{(2)}), \quad (7.31)$$

$$U_3^{(1)} - U_3^{(2)} = 0. \quad (7.32)$$

Si le système initial est issu d'un problème avec des conditions au bord de type Neumann, les matrices $M_{uu}^{(s)}$ seront singulières et posséderont des noyaux que nous noterons $R_u^{(s)}$ dont les combinaisons seront notées $R_u^{(s)} \alpha_u^{(s)}$. Nous pouvons résoudre pour les vitesses les équations locales (7.29) et (7.30) en utilisant les inverses généralisés $M_{uu}^{(s)+}$, $s = 1, 2$ pour avoir

$$U_3^{(1)} = M_{uu}^{(1)+} \left(\tilde{F}_3^{(1)} - M_{up}^{(1)} P_3 - \lambda \right) + R_u^{(1)} \alpha_u^{(1)}, \quad (7.33)$$

$$U_3^{(2)} = M_{uu}^{(2)+} \left(\tilde{F}_3^{(2)} - M_{up}^{(2)} P_3 + \lambda \right) + R_u^{(2)} \alpha_u^{(2)}. \quad (7.34)$$

Le report des expressions ci-dessus dans les équations (7.31) et (7.32) donne

$$\begin{aligned} M_{pu}^{(1)} \left(M_{uu}^{(1)+} \right) \lambda &+ \left(M_{pp}^{(1)} + M_{pu}^{(1)} \left(M_{uu}^{(1)+} \right) M_{up}^{(1)} \right) P_3 - M_{pu}^{(1)} R_u^{(1)} \alpha_u^{(1)} + \\ - M_{pu}^{(2)} \left(M_{uu}^{(2)+} \right) \lambda &+ \left(M_{pp}^{(2)} + M_{pu}^{(2)} \left(M_{uu}^{(2)+} \right) M_{up}^{(2)} \right) P_3 - M_{pu}^{(2)} R_u^{(2)} \alpha_u^{(2)} = \\ M_{pu}^{(1)} \left(M_{uu}^{(1)+} \right) \tilde{F}_3^{(1)} + \tilde{F}^{(1)} &+ M_{pu}^{(2)} \left(M_{uu}^{(2)+} \right) \tilde{F}_3^{(2)} + \tilde{F}^{(2)} \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \left(M_{uu}^{(1)+} + M_{uu}^{(2)+} \right) \lambda &+ \left(M_{uu}^{(1)+} M_{up}^{(1)} - M_{uu}^{(2)+} M_{up}^{(2)} \right) P_3 - R_u^{(1)} \alpha_u^{(1)} + R_u^{(2)} \alpha_u^{(2)} = \\ \left(M_{uu}^{(1)+} \right) \tilde{F}_3^{(1)} - \left(M_{uu}^{(2)+} \right) \tilde{F}_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

L'extraction des expressions (7.33) et (7.34) de $U_3^{(1)}$ et $U_3^{(2)}$ provient de la résolution des problèmes de Neumann en vitesse (7.29) et (7.30) qui nécessite les conditions de compatibilité qui s'écrivent

$$R_u^{(s)T} \left(\tilde{F}_3^{(s)} - M_{up}^{(s)} P_3 - T^{(s)T} \lambda \right) = 0, \quad s = 1, 2$$

où $T^{(1)} = 1$ et $T^{(2)} = -1$. On réécrit la condition de compatibilité ci-dessus sous la forme

$$R_u^{(s)T} \left(\tilde{F}_3^{(s)} - T^{(s)T} \lambda \right) - R_u^{(s)T} M_{up}^{(s)} P_3 = 0, \quad s = 1, 2. \quad (7.37)$$

Nous avons $R_u^{(s)T} M_{up}^{(s)} P_3 = M_{pu}^{(1)} R_u^{(1)} \alpha_u^{(1)} = M_{pu}^{(2)} R_u^{(2)} \alpha_u^{(2)} = 0$ par l'équation (7.24).

Des équations (7.35), (7.36) et (7.37), on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} F_{DP} & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -e^T \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

avec

$$F_{DP}^{(s)} = \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) & \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) & \left(M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \right) \end{pmatrix}, \quad F_{DP} = \sum_{s=1}^2 B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T},$$

$$B^{(s)} = \begin{pmatrix} T^{(s)} & 0 \\ 0 & L^{(s)T} \end{pmatrix}, \quad d = \sum_{s=1}^2 B^{(s)} \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_3^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_3^{(s)} + \tilde{F}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_u^{(1)} \\ \alpha_u^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$e^{(s)} = \left(\tilde{F}_3^{(s)T} R_u^{(s)} \right), \quad e = \begin{pmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} \end{pmatrix}, \quad G_I = \begin{pmatrix} T^{(1)} R_u^{(1)} & T^{(2)} R_u^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ P_3 \end{pmatrix}^T.$$

Cas d'une décomposition en un nombre quelconque de sous-domaines

Le domaine Ω est subdivisé en N_s sous domaines $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1, N_s}$. Nous numérotons les degrés de liberté dans chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$ en commençant par les noeuds internes suivis des noeuds situés à l'interface entre les sous-domaines voisins. L'indice i indiquera que la grandeur est interne au sous-domaine et l'indice Γ les grandeurs situées aux interfaces. Les espaces V_h et Q_h se décomposent en une somme directe comme

$$V_h = \left(\sum_{s=1}^{N_s} \overline{V}_h^{(s)} \right) \oplus \overline{V}_{h,\Gamma} \quad , \quad Q_h = \left(\sum_{s=1}^{N_s} \overline{Q}_h^{(s)} \right) \oplus \overline{Q}_{h,\Gamma} \quad , \quad \overline{V}_h^{(s)} \cap \overline{V}_h^{(r)} = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{Q}_h^{(s)} \cap \overline{Q}_h^{(r)} = \emptyset \quad \forall s \neq r.$$

Nous utiliserons la notation suivante :

$$\begin{aligned} M_{uu}^{(s)} &= A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad M_{uu} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{uu}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)}, \\ M_{up}^{(s)} &= B_{\Gamma\Gamma}^{(s)T} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{i\Gamma}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ M_{pu}^{(s)} &= B_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix}, \\ M_{pp}^{(s)} &= \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{i\Gamma}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{pp} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{pp}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\Gamma}^{(s)} &= F_{\Gamma}^{(s)} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{F}^{(s)} &= \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La partition du système matriciel issu de l'équation (7.11) en un nombre quelconque de sous-problèmes avec une numérotation des inconnues commençant par les inconnues

internes donnent

$$\begin{pmatrix}
 A_{ii}^{(1)} & B_{ii}^{(1)T} & 0 & \dots & \dots & 0 & A_{i\Gamma}^{(1)} L_{\Gamma}^{(1)} & B_{\Gamma i}^{(1)T} L_{\Gamma}^{(1)} \\
 B_{ii}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & B_{i\Gamma}^{(1)} L_{\Gamma}^{(1)} & 0 \\
 0 & & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \ddots & & \ddots & & 0 & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & \dots & 0 & A_{ii}^{(N_s)} & B_{ii}^{(N_s)T} & A_{i\Gamma}^{(N_s)} L_{\Gamma}^{(N_s)} & B_{\Gamma i}^{(N_s)T} L_{\Gamma}^{(N_s)} \\
 0 & \dots & \dots & 0 & B_{ii}^{(N_s)} & 0 & B_{i\Gamma}^{(N_s)} L_{\Gamma}^{(N_s)} & 0 \\
 L_{\Gamma}^{(1)T} A_{\Gamma i}^{(1)} & L_{\Gamma}^{(1)T} B_{i\Gamma}^{(1)T} & \dots & \dots & L_{\Gamma}^{(N_s)T} A_{i\Gamma}^{(N_s)} & L_{\Gamma}^{(N_s)T} B_{i\Gamma}^{(N_s)T} & A_{\Gamma\Gamma} & B_{\Gamma\Gamma}^T \\
 L_{\Gamma}^{(1)T} B_{\Gamma i}^{(1)} & 0 & \dots & \dots & L_{\Gamma}^{(N_s)T} B_{\Gamma i}^{(N_s)} & 0 & B_{\Gamma\Gamma} & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_i^{(1)} \\
 P_i^{(1)} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_i^{(N_s)} \\
 P_i^{(N_s)} \\
 U_{\Gamma} \\
 P_{\Gamma}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F_i^{(1)} \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 F_i^{(N)} \\
 0 \\
 F_{\Gamma} \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (7.39)$$

avec

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} F_{\Gamma}^{(s)} = F_{\Gamma}.$$

Le développement des N_s premières lignes de (7.39) s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)} U_{\Gamma} + \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)} P_{\Gamma} = F_i^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq N_s, \quad (7.40)$$

la $(N_s + 1)^{\text{ième}}$ ligne se traduit par

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \end{pmatrix} + A_{\Gamma\Gamma} U_{\Gamma} + B_{\Gamma\Gamma}^T P_{\Gamma} = F_{\Gamma}, \quad (7.41)$$

et la dernière ligne donne

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ P_i^{(s)} \end{pmatrix} + B_{\Gamma\Gamma} U_{\Gamma} = 0. \quad (7.42)$$

Les problèmes (7.40) sont bien posés [15], [62] et on peut éliminer les inconnues internes $U_i^{(s)}$ et $P_i^{(s)}$ puis reporter les expressions obtenues dans les équations (7.41) et (7.42). On

trouve :

$$\begin{aligned} & \left(A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \right) L_{\Gamma}^{(s)} U_{\Gamma} + \\ & \left(B_{\Gamma\Gamma}^T - \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \right) L_{\Gamma}^{(s)} P_{\Gamma} = \\ & F_{\Gamma} - \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} F_i^{(s)}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} & \left(B_{\Gamma\Gamma} - \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \right) L_{\Gamma}^{(s)} U_{\Gamma} - \\ & \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)} P_{\Gamma}^{(s)} = \\ & -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} F_i^{(s)}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Les équations (7.43) et (7.44) sont équivalentes au système suivant

$$\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{uu}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} & \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{up}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} \\ \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{pu}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} & -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{pp}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\Gamma} \\ P_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \tilde{F}_{\Gamma}^{(s)} \\ -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \tilde{F}^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Nous allons résoudre le système (7.45) par une méthode de sous-domaines en appliquant FETI à la vitesse et la méthode du complément de Schur primal à la pression sans découpler les inconnues. L'introduction des multiplicateurs de Lagrange pour assurer la contrainte de continuité de la vitesse aux interfaces transforme le système (7.45) en

$$\begin{pmatrix} M_{uu}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & M_{up}^{(1)} L_{\Gamma}^{(1)} & T^{(1)T} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{uu}^{(N_s)} & M_{up}^{(N_s)} L_{\Gamma}^{(N_s)} & T^{(N_s)T} \\ L_{\Gamma}^{(1)T} M_{pu}^{(1)} & \dots & \dots & L_{\Gamma}^{(N_s)T} M_{pu}^{(N_s)} & -M_{pp} & 0 \\ T^{(1)} & \dots & \dots & T^{(N_s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\Gamma}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{\Gamma}^{(N_s)} \\ P_{\Gamma} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{\Gamma}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{F}_{\Gamma}^{(N_s)} \\ -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \tilde{F}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Nous avons imposé une unique pression à l'interface comme dans la méthode primale. L'équation (7.46) se sépare naturellement en plusieurs problèmes locaux

$$M_{uu}^{(s)} U_{\Gamma}^{(s)} + M_{up}^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} P_{\Gamma} + T^{(s)T} \lambda = \tilde{F}_{\Gamma}^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq N_s, \quad (7.47)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} M_{pu}^{(s)} U_{\Gamma}^{(s)} - M_{pp} P_{\Gamma} = -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} \tilde{F}^{(s)}, \quad (7.48)$$

et la contrainte de continuité de la vitesse sur l'interface Γ

$$\sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} U_{\Gamma}^{(s)} = 0. \quad (7.49)$$

Un découpage quelconque du domaine Ω introduirait des sous-domaines flottants et des matrices $\{M_{uu}^{(j)}\}_{1 \leq j \leq N_f}$ singulières. Nous noterons $R_u^{(j)}$ les noyaux de ces matrices et leur

combinaison $R_u^{(j)} \alpha_u^{(j)}$. Nous pouvons résoudre pour les vitesses les équations locales (7.47) en utilisant les inverses généralisés $M_{uu}^{(s)+}$, $1 \leq s \leq N_f$ pour avoir

$$U_\Gamma^{(s)} = M_{uu}^{(s)+} \left(\tilde{F}_\Gamma^{(s)} - M_{up}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma - T^{(s)T} \lambda \right) + R_u^{(s)} \alpha_u^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq N_s. \quad (7.50)$$

Les inverses généralisés deviennent des inverses classiques pour les sous-domaines qui possèdent suffisamment de conditions de Dirichlet pour supprimer les noyaux. Le report de ces expressions (7.50) de $U_\Gamma^{(s)}$ dans les équations (7.48) et (7.49) donne respectivement

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \lambda &+ \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} \left(M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \right) L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma \\ - \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} M_{pu}^{(s)} R_u^{(s)} \alpha_u^{(s)} &= \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_\Gamma^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} \tilde{F}^{(s)}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \lambda + \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma - \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} R_u^{(s)} \alpha_u^{(s)} = \sum_{s=1}^{N_s} T^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_\Gamma^{(s)} \quad (7.52)$$

L'extraction des expressions (7.50) de $U_\Gamma^{(s)}$ se faisant par la résolution d'un problème de Neumann en vitesse nécessite les conditions de compatibilité suivantes :

$$R_u^{(s)T} \left(\tilde{F}_\Gamma^{(s)} - M_{up}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma - T^{(s)T} \lambda \right) = 0, \quad 1 \leq s \leq N_f. \quad (7.53)$$

On peut arranger l'équation (7.53) sous la forme

$$- R_u^{(s)T} T^{(s)T} \lambda - R_u^{(s)T} M_{up}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma = - R_u^{(s)T} \tilde{F}_\Gamma^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq N_f. \quad (7.54)$$

L'équation (7.24) permet d'avoir $R_u^{(s)T} M_{up}^{(s)} L_\Gamma^{(s)} P_\Gamma = M_{pu}^{(s)} R_u^{(s)} \alpha_u^{(s)} = 0$ pour tout $s = 1, \dots, N_f$. Introduisons les matrices et les vecteurs suivants :

$$F_{DP}^{(s)} = \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) & \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) & \left(M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \right) \end{pmatrix}, \quad F_{DP} = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T}, \quad (7.55)$$

$$B^{(s)} = \begin{pmatrix} T^{(s)} & 0 \\ 0 & L^{(s)T} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ P_\Gamma \end{pmatrix}, \quad d = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_\Gamma^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) \tilde{F}_\Gamma^{(s)} + \tilde{F}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_u^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_u^{(N_f)} \end{pmatrix},$$

$$e^{(s)} = \left(\tilde{F}_\Gamma^{(s)T} R_u^{(s)} \right), \quad e = \begin{pmatrix} e^{(1)} & \dots & e^{(N_s)} \end{pmatrix}, \quad G_I = \begin{pmatrix} T^{(1)} R_u^{(1)} & \dots & T^{(N_f)} R_u^{(N_f)} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons des équations (7.51), (7.52) et (7.54) le problème d'interface hybride duale-primale

$$\begin{pmatrix} F_{DP} & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -e^T \end{pmatrix}. \quad (7.56)$$

Le système (7.56) peut être singulier pour plusieurs raisons. En présence de points multiples, la contrainte de continuité de la vitesse est redondante et l'opérateur F_{DP} semi-défini positif [32]. Cette singularité de F_{DP} ne pose pas de difficulté lors de la résolution du système (7.56) par la méthode du gradient conjugué projeté. En revanche, si les conditions au bord du domaine Ω sont de type Neumann, la matrice G_I possède un noyau

qu'il faut détecter afin de vérifier la condition de compatibilité nécessaire à la convergence du gradient conjugué projeté appliqué à (7.56) [65]. Une autre cause de singularité de l'opérateur F_{DP} est la condition de Dirichlet que l'on imposerait sur tout le bord du domaine Ω . Cette singularité est due à la singularité du complément de Schur de pression $\Sigma_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)T} \left(M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \left(M_{uu}^{(s)+} \right) M_{up}^{(s)} \right) L_\Gamma^{(s)}$ que contient F_{DP} . Cette singularité est la motivation de l'extension de la méthode BDD aux problèmes singuliers que nous avons précédemment présentée.

7.4.2 La méthode du complément de Schur hybride primale-duale

Cette approche de la méthode du complément de Schur hybride diffère de la précédente par le choix de la méthode BDD pour la vitesse et le traitement de la pression par FETI. En changeant les rôles de la vitesse, de la pression et du multiplicateur de Lagrange dans la méthode hybride duale-primale, la même procédure conduit au problème d'interface hybride primale-duale suivant :

$$\begin{pmatrix} F_{PD} & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -e^T \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

avec

$$F_{PD}^{(s)} = \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} \right) & M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) \\ \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} & \left(M_{pp}^{(s)+} \right) \end{pmatrix}, \quad F_{PD} = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} F_{PD}^{(s)} B^{(s)T},$$

$$B^{(s)} = \begin{pmatrix} L^{(s)T} & 0 \\ 0 & T^{(s)} \end{pmatrix}, \quad G_I = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ T^{(1)} R_p^{(1)} & \cdots & T^{(N_f)} R_p^{(N_f)} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} U_\Gamma \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_p^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_p^{(N_f)} \end{pmatrix},$$

$$d = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} \begin{pmatrix} \tilde{F}_\Gamma^{(s)} - M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) \tilde{F}^{(s)} \\ - \left(M_{pp}^{(s)+} \right) \tilde{F}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad e^{(s)} = \left(\tilde{F}^{(s)T} R_p^{(s)} \right), \quad e = \begin{pmatrix} e^{(1)} & \cdots & e^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Ici, les $R_p^{(s)}$ sont les noyaux des matrices singulières $M_{pp}^{(s)}$ associées aux problèmes de Neumann en pression dans les sous-domaines flottants et $R_p^{(s)} \alpha_p^{(s)}$ leur combinaison.

7.4.3 Positivité des opérateurs d'interface

Théorème 7.2. *Les opérateurs $F_{DP}^{(s)}$ et F_{DP} sont symétriques semi-définis positifs en général*

Démonstration :

Etant donné un vecteur interface $\begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \in \ker \left(G_I^T \right)$, on a

$$G_I^T \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_u^{(1)T} T^{(1)T} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ R_u^{(N)T} T^{(N)T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.58)$$

En utilisant la s^{ieme} ligne de (7.58), on obtient

$$R_u^{(s)T} T^{(s)T} \lambda^{(s)} = 0. \quad (7.59)$$

La condition de compatibilité (7.59) assure que l'opérateur $F_{DP}^{(s)}$ est bien défini. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}^T F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} T^{(s)T} & T^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} T^{(s)T} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{(s)} \\ P_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{(s)T} T^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} T^{(s)T} \lambda^{(s)} + \lambda^{(s)T} T^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} P_\Gamma^{(s)} \\ &+ P_\Gamma^{(s)T} M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} T^{(s)T} \lambda^{(s)} + P_\Gamma^{(s)T} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \end{pmatrix} P_\Gamma^{(s)} \\ &= \left\{ T^{(s)T} \lambda^{(s)} + M_{up}^{(s)} P_\Gamma^{(s)} \right\}^T M_{uu}^{(s)+} \left\{ T^{(s)T} \lambda^{(s)} + M_{up}^{(s)} P_\Gamma^{(s)} \right\} + P_\Gamma^{(s)T} M_{pp}^{(s)} P_\Gamma^{(s)}. \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus est bien définie du fait des égalités (7.24) et (7.59). Le complément de Schur du système de Stokes $M_{uu}^{(s)}$ étant semi-défini positif nous déduisons que son inverse généralisé est semi-défini positif [51]. Nous avons également montré dans le lemme 7.1 que le complément de Schur $M_{pp}^{(s)}$ est semi-défini positif en général, il est défini-positif sur l'ensemble des traces de pressions à moyenne nulle.

Pour un élément $R_P^{(s)}$ du noyau du complément de Schur $M_{pp}^{(s)}$ nous avons :

$$\begin{aligned} F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} -M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} \\ R_P^{(s)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} \\ R_P^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} + \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} \\ -M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} + \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \end{pmatrix} R_P^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ M_{pp}^{(s)} R_P^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puisque par définition $M_{pp}^{(s)} R_P^{(s)} = 0$. On conclut de ce qui précède que l'opérateur $F_{DP}^{(s)}$ est semi-défini positif et son noyau de la forme

$$\ker \left(F_{DP}^{(s)} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} -M_{up}^{(s)} R_P^{(s)} \\ R_P^{(s)} \end{pmatrix} : R_P^{(s)} \in \ker \left(M_{pp}^{(s)} \right) \right\}.$$

Donc si nous nous plaçons dans l'espace des traces de pression à moyenne nulle l'opérateur $F_{DP}^{(s)}$ est défini positif. On peut de la même manière montrer que l'opérateur $F_{PD}^{(s)}$ est semi-défini positif en général et défini-positif en présence des conditions au bord de type Dirichlet.

Dans le cas de la méthode primale-duale, on aura

$$\begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix} \in \ker \left(G_I^T \right) \Leftrightarrow G_I^T \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & R_p^{(1)T} T^{(1)T} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & R_p^{(N)T} T^{(N)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.60)$$

La s^{ieme} ligne de l'équation (7.60) donne

$$R_p^{(s)T} T^{(s)T} \lambda^{(s)} = 0. \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix}^T F_{PD}^{(s)} \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} & M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \\ T^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} & T^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\Gamma^{(s)} \\ \lambda^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= U_\Gamma^{(s)T} \left(M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} \right) U_\Gamma^{(s)} + U_\Gamma^{(s)T} M_{up}^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \lambda^{(s)} \\ &+ \lambda^{(s)T} T^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) M_{pu}^{(s)} U_\Gamma^{(s)} + \lambda^{(s)T} T^{(s)} \left(M_{pp}^{(s)+} \right) T^{(s)T} \lambda^{(s)} \\ &= \left\{ T^{(s)T} \lambda^{(s)} + M_{pu}^{(s)} U_\Gamma^{(s)} \right\}^T M_{pp}^{(s)+} \left\{ T^{(s)T} \lambda^{(s)} + M_{pu}^{(s)} U_\Gamma^{(s)} \right\} + U_\Gamma^{(s)T} M_{uu}^{(s)} U_\Gamma^{(s)} \end{aligned}$$

On conclut que la matrice hybride $F_{PD}^{(s)}$ est semi-définie positive en général et définie-positive sur l'orthogonal de son noyau. On peut montrer en utilisant (7.24) que

$$\ker \left(F_{PD}^{(s)} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} R_u^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} : R_u^{(s)} \in \ker \left(M_{uu}^{(s)} \right) \right\}.$$

7.5 La méthode du gradient conjugué préconditionné projeté pour la résolution du problème d'interface hybride

Les propriétés des opérateurs d'interface hybrides que nous venons de démontrer rendent possible la résolution des systèmes d'interface par la méthode de gradient conjugué. Nous présentons dans cette section la résolution du problème d'interface du complément de Schur dual-primal par la méthode du gradient conjugué préconditionné projeté. La résolution de la méthode primale-duale peut s'en déduire aisément.

Le système (7.56) s'écrit

$$F_{DP}\Lambda - G_I\alpha = d, \quad -G_I^T\Lambda = -e^T.$$

En supposant $e = 0$, nous avons successivement,

$$\begin{aligned} \langle F_{DP}\Lambda, \mu \rangle - \langle G_I\alpha, \mu \rangle &= \langle d, \mu \rangle, \quad \forall \mu, \\ \langle F_{DP}\Lambda, \mu \rangle - \langle \alpha, G_I^T\mu \rangle &= \langle d, \mu \rangle, \quad \forall \mu, \\ \langle F_{DP}\Lambda, \mu \rangle &= \langle d, \mu \rangle, \quad \forall \mu \quad \text{tel que} \quad G_I^T\mu = 0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Soit P le projecteur sur $\text{Ker} \left(G_I^T \right)$, le noyau de G_I^T . Nous avons

$$G_I^T\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \in \text{Ker} \left(G_I^T \right) \Leftrightarrow \mu = P\mu.$$

L'équation (7.62) est alors équivalente à

$$\begin{aligned} \langle F_{DP}\Lambda, \mu \rangle &= \langle d, \mu \rangle \Leftrightarrow \\ \langle F_{DPP}\Lambda, P\mu \rangle &= \langle d, P\mu \rangle \Leftrightarrow \\ \langle P^T F_{DPP}\Lambda, \mu \rangle &= \langle P^T d, \mu \rangle, \quad \forall \mu, \Lambda \in \text{Ker} \left(G_I^T \right). \end{aligned}$$

Nous sommes finalement amenés à résoudre sur le noyau de G_I^T le système projeté

$$P^T F_{DP} P \Lambda = P^T d. \quad (7.63)$$

Nous ferons cette résolution par une méthode du gradient conjugué préconditionné. Une décomposition de l'espace réel sous la forme

$$\mathbb{R}^{N_k} = \text{Ker} \left(G_I^T \right) \oplus \text{Ker} \left(G_I^T \right)^\perp = \text{Ker} \left(G_I^T \right) \oplus \text{Im} (Q G_I)$$

nous permet de rechercher le projecteur P sous la forme

$$P \Lambda = \Lambda + Q G_I \beta$$

où Q est une matrice symétrique définie positive. On a

$$G_I^T P \Lambda = 0 \Leftrightarrow G_I^T Q G_I \beta = -G_I^T \Lambda \Rightarrow \beta = - \left(G_I^T Q G_I \right)^{-1} G_I^T \Lambda \quad \text{et}$$

$$P \Lambda = \Lambda - Q G_I \left(G_I^T Q G_I \right)^{-1} G_I^T \Lambda.$$

Le projecteur P prend finalement la forme

$$P = Id - Q G_I \left(G_I^T Q G_I \right)^{-1} G_I^T \quad \text{où } Id \text{ est la matrice identité.} \quad (7.64)$$

7.5.1 Préconditionnement

Nous avons choisi de traiter la pression par la méthode du complément de Schur primal dont un préconditionneur efficace est la méthode BDD. Nous allons donc nous appuyer sur la stratégie de cette méthode en vue de proposer un préconditionneur efficace pour la résolution du système (7.63). Le préconditionneur BDD est constitué d'un préconditionneur local et d'un préconditionneur grossier dont le rôle est de propager l'information entre tous les sous-domaines et d'assurer l'existence d'une solution au préconditionneur local. Cette propagation globale d'information entre les sous-domaines est nécessaire pour assurer l'extensibilité de la méthode. L'extensibilité est la propriété que disposent certaines méthodes de décomposition de domaine à préserver leur vitesse de convergence indépendamment du nombre de sous-domaines.

Etant données les familles de poids $\left\{ D_{\lambda_u}^{(s)} \right\}_{s=1,N}$, $\left\{ D_p^{(s)} \right\}_{s=1,N}$ associées à la vitesse et à la

pression respectivement, la matrice $D^{(s)} = \begin{pmatrix} D_{\lambda_u}^{(s)} & 0 \\ 0 & D_p^{(s)} \end{pmatrix}$, $T_D^{(s)} = \begin{pmatrix} D_{\lambda_u}^{(s)T} & 0 \\ 0 & L^{(s)T} D_p^{(s)} \end{pmatrix}$

et un résidu $\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}$.

$F_{DP}^{(s)}$ est l'opérateur qui, à un effort et une pression donnés, associe une vitesse et la dérivée normale de la pression. Son inverse est physiquement l'opérateur qui associe un effort et une pression à une vitesse et la dérivée normale de pression donnés. Ces considérations physiques ont permis de proposer comme préconditionneur local l'opérateur $F_{PD}^{(s)}$ [38] :

$$F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{p}^{(s)} \end{pmatrix} = T_D^{(s)T} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{p}^{(s)} \end{pmatrix} = F_{PD}^{(s)} T_D^{(s)T} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}, \quad 1 \leq s \leq N_s.$$

Introduisons la matrice

$$M_{DP}^{(s)} = \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} \right) & -M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

En utilisant (7.24) on peut montrer que $M_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} R_u^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ où $R_u^{(s)}$ est le noyau de $M_{uu}^{(s)}$.

Cette singularité de $M_{DP}^{(s)}$ disparaît en présence de conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse. Nous avons :

Lemme 7.3. *Les opérateurs $F_{DP}^{(s)}$ et $M_{DP}^{(s)}$ sont inverses*

Démonstration :

$$\begin{aligned} F_{DP}^{(s)} M_{DP}^{(s)} &= \\ & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \\ M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)} + M_{pu}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{up}^{(s)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} \right) & -M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

où Id est la matrice identité.

Nous venons de montrer que les matrices $M_{DP}^{(s)}$ et $F_{DP}^{(s)}$ sont inverses l'une de l'autre. La méthode FETI et la méthode BDD adoptent une stratégie commune pour proposer les préconditionneurs locaux. La technique consiste à approcher l'inverse d'une somme par une somme pondérée d'inverses [66, 46, 54]. Le préconditionneur local que nous proposons pour la méthode hybride duale-primale dérive de la même idée. L'opérateur dual-primale F_{DP} étant une somme d'opérateurs locaux $F_{DP}^{(s)}$ (7.55), nous approchons son inverse par une somme pondérée des inverses des opérateurs $F_{DP}^{(s)}$. Nous venons de montrer que ces inverses sont précisément les matrices $M_{DP}^{(s)}$. Le préconditionneur local pour la méthode duale-primale que nous proposons est donc de la forme :

$$M_{DP} = \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T}. \quad (7.66)$$

Observons le calcul du produit matrice-vecteur $M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(M_{uu}^{(s)} + M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} \right) & -M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} M_{pu}^{(s)} & \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u \\ D_p^{(s)} L^{(s)} r_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{uu}^{(s)} T^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u + M_{up}^{(s)} \begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \left(M_{pu}^{(s)} T^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u - D_p^{(s)} L^{(s)} r_p \right) \\ -\begin{pmatrix} M_{pp}^{(s)+} \end{pmatrix} \left(M_{pu}^{(s)} T^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u - D_p^{(s)} L^{(s)} r_p \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.67)$$

Nous allons montrer dans la section 7.5.3 que le produit par $M_{pp}^{(s)+}$ se fait par la résolution d'un problème de Neumann en pression. Cette résolution nécessite que le second membre soit à moyenne nulle. En notant $R_p^{(s)}$ la pression constante dans chaque sous-domaine cette condition de compatibilité se traduit pour (7.67) par la condition d'orthogonalité

$$R_p^{(s)T} \left(M_{pu}^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u - D_p^{(s)} L^{(s)} r_p \right) = \begin{pmatrix} -M_{up}^{(s)} R_p^{(s)} \\ R_p^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T^{(s)T} D_{\lambda_u}^{(s)} r_u \\ D_p^{(s)} L^{(s)} r_p \end{pmatrix} = 0. \quad (7.68)$$

Soit $z_p^{(s)}$ une base contenant $R_p^{(s)}$.

Nous définissons le préconditionneur BDD pour la méthode hybride duale-primale par

$$M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{s=1}^{N_s} L^{(s)T} D_p^{(s)} z_p^{(s)} \gamma^{(s)} \end{pmatrix}$$

ou sous la forme condensée

$$M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma \quad (7.69)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}^{(s)} \end{pmatrix} = M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C^{(1)} & \dots & C^{(N_s)} \end{pmatrix}, \quad C^{(s)} = L^{(s)T} D_p^{(s)} z_p^{(s)}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma^{(N_s)} \end{pmatrix}.$$

Dans la formule (7.69), on cherchera les coefficients de combinaison γ de manière à ce que le préconditionneur BDD soit le plus proche possible de l'inverse de l'opérateur $P^T F_{DP} P$ du problème d'interface (7.63). Nous cherchons donc γ tel que

$$P^T F_{DP} P M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}.$$

L'optimisation du préconditionneur BDD par rapport à sa composante γ donne

$$\left\langle P^T F_{DP} P M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle = 0, \quad \forall \beta.$$

Après calcul et en utilisant l'équation (7.69), on trouve le problème grossier suivant qui couple tous les sous-domaines, propage globalement l'information et rend le préconditionneur extensible comme nous allons démontrer :

$$\left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right)^T F_{DP} \left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right) \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - P^T F_{DP} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}^{(s)} \end{pmatrix} \right). \quad (7.70)$$

7.5.2 Formation de la matrice du problème grossier

La résolution de problèmes sur grille grossière dans les méthodes itératives en vue de propager globalement l'information est commune aux méthodes multigrilles et les méthodes de décomposition de domaine. Contrairement aux méthodes multigrilles, il est important que la matrice du problème grossier dans les méthodes par sous-domaines soit creuse et de petite taille. Le projecteur qui apparaît dans la matrice du problème (7.70)

pourrait coupler tous les sous-domaines, détruire la structure creuse du problème grossier et augmenter sa dimension. Nous allons montrer qu'il est possible d'éliminer ce projecteur dans la matrice

$$\left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right)^T F_{DP} \left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right).$$

Rappelons que pour la méthode hybride duale-primale

$$G_I = \begin{pmatrix} T^{(1)} R_u^{(1)} & \cdots & T^{(N_s)} R_u^{(N_s)} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C^{(1)} & \cdots & C^{(N_s)} \end{pmatrix}.$$

On a

$$G_I^T \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_u^{(1)T} T^{(1)T} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ R_u^{(N_s)T} T^{(N_s)T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ C^{(1)} & \cdots & C^{(N_s)} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.71)$$

En se rappelant que P est un projecteur sur le noyau de G_I^T , l'équation (7.71) prend une importance particulière car elle indique l'appartenance de $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$ à $\text{Ker}(G_I^T)$. Ce qui nous permet d'écrire $P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$, d'éviter la projection lors de la fabrication de la matrice du problème grossier et de récupérer une matrice grossière creuse dont l'importance a été soulignée plus haut. Le problème (7.70) prend finalement la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - P^T F_{DP} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{p}^{(s)} \end{pmatrix} \right). \quad (7.72)$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$ est creuse, avec des blocs nuls correspondant aux sous-domaines qui n'ont aucun sous-domaine voisin commun. On peut la construire en utilisant des produits scalaires et des produits matrices-vecteurs de la forme $F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C^{(s)} \end{pmatrix}$. De plus, ces produits matrices-vecteurs peuvent être calculés en utilisant uniquement les matrices $F_{DP}^{(j)}$ des sous-domaines voisins au sous-domaine $\Omega^{(s)}$. Les produits scalaires intervenant dans la formation de la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$ peuvent également être restreints de la même façon [54]. Chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$ devra donc transférer sa base $C^{(s)}$ à ses voisins.

7.5.3 Calcul des produits matrices-vecteurs de la méthode hybride

Un avantage de la méthode du gradient conjugué préconditionné lors de la résolution des problèmes de grande taille est qu'elle ne nécessite pas la formation explicite des matrices $F_{DP}^{(s)}$ mais des produits matrices-vecteurs. Nous indiquons dans cette section le calcul des produits matrices-vecteurs qui apparaissent dans la méthode du complément de Schur hybride.

Étant donné \mathcal{T}_Γ , le produit matrice-vecteur $M_{uu}^{(s)+} \mathcal{T}_\Gamma$ peut être évalué en résolvant un

problème avec la condition au bord de Neumann indiquée entre les accolades :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & B_{i\Gamma}^{(s)} \\ A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} & A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \\ \widetilde{U}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{\mathcal{T}_\Gamma\} \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

En effet, les deux premières lignes de l'équation (7.73) donnent :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \widetilde{U}_\Gamma^{(s)}$$

et substituant cela dans la dernière ligne de l'équation (7.73) on est conduit à

$$\widetilde{U}_\Gamma^{(s)} = \left(A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \right)^+ \{\mathcal{T}_\Gamma\} = M_{uu}^{(s)+} \{\mathcal{T}_\Gamma\}.$$

Le produit matrice-vecteur $M_{pp}^{(s)+} \{\mathcal{T}_\Gamma\}$ se calcule aussi par la résolution d'un problème de Neumann comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{\mathcal{T}_\Gamma\} \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

Les deux premières lignes de l'équation (7.74) donnent :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \widetilde{P}_\Gamma^{(s)}$$

et en remplaçant cela dans la dernière ligne de (7.74) on obtient

$$\widetilde{P}_\Gamma^{(s)} = \left(- \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \right)^+ \{\mathcal{T}_\Gamma\} = -M_{pp}^{(s)+} \{\mathcal{T}_\Gamma\}.$$

Étant donné un vecteur d'interface $\widetilde{P}_\Gamma^{(s)}$, le calcul du produit matrice-vecteur $M_{up}^{(s)} \widetilde{P}_\Gamma^{(s)}$ se fait par la résolution d'un problème avec condition à la limite de Dirichlet indiquée entre les accolades :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \\ \{\widetilde{P}_\Gamma^{(s)}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{\widetilde{P}_\Gamma^{(s)}\} \end{pmatrix}. \quad (7.75)$$

En effet, des deux premières lignes de l'équation (7.75), on obtient

$$\begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \{\widetilde{P}_\Gamma^{(s)}\}.$$

Ensuite on calcule le produit matrice-vecteur suivant en utilisant les deux premières lignes de (7.75)

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} & B_{\Gamma\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{U}_i^{(s)} \\ \widetilde{P}_i^{(s)} \\ \{\widetilde{P}_\Gamma^{(s)}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{T}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (7.76)$$

où

$$\mathcal{T}_\Gamma^{(s)} = \left(B_{\Gamma\Gamma}^{(s)T} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \{ \tilde{P}_\Gamma^{(s)} \}.$$

Le calcul du produit matrice-vecteur $M_{uu}^{(s)} \tilde{U}_\Gamma^{(s)}$ se fait de la même manière en résolvant le problème de Dirichlet :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & B_{i\Gamma}^{(s)} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \\ \{ \tilde{U}_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{ \tilde{U}_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix}. \quad (7.77)$$

En effet, des deux premières lignes de l'équation (7.77), on a

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \{ \tilde{U}_\Gamma^{(s)} \}$$

Le produit matrice-vecteur suivant avec les deux premières lignes de (7.77) donne

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & B_{i\Gamma}^{(s)} \\ A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} & A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \\ \{ \tilde{U}_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{T}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \quad (7.78)$$

où

$$\mathcal{T}_\Gamma^{(s)} = \left(A_{\Gamma\Gamma}^{(s)} - \begin{pmatrix} A_{\Gamma i}^{(s)} & B_{i\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{i\Gamma}^{(s)} \\ B_{i\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \right) \{ \tilde{U}_\Gamma^{(s)} \}.$$

Le produit matrice-vecteur $M_{pp}^{(s)} \{ P_\Gamma^{(s)} \}$ se calcule par la résolution d'un problème de Dirichlet comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \\ \{ P_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{ P_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix}. \quad (7.79)$$

Les deux premières lignes de l'équation (7.79) donnent :

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \{ P_\Gamma^{(s)} \}$$

Le produit scalaire suivant qui utilise les deux premières lignes de (7.79) donne

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & B_{ii}^{(s)T} & B_{\Gamma i}^{(s)T} \\ B_{ii}^{(s)} & 0 & 0 \\ B_{\Gamma i}^{(s)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{(s)} \\ \tilde{P}_i^{(s)} \\ \{ P_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pp}^{(s)} \{ P_\Gamma^{(s)} \} \end{pmatrix}. \quad (7.80)$$

7.6 Analyse théorique de la méthode du complément de Schur hybride préconditionnée

7.6.1 Forme matricielle du préconditionneur BDD-hybride

L'algorithme BDD s'écrit en toute généralité sous la forme :

Algorithme 7.1. *BDD dans la méthode hybride*

1. Ajuster le résidu initial $\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}$ en résolvant le problème auxiliaire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T P^T F_{DP} P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}. \quad (7.81)$$

Signalons que cette étape est facultative si un prétraitement a été réalisé sur le résidu initial et que la formation de la matrice de ce système ne nécessite pas la projection.

2. Calculer les produits matrices-vecteurs locaux

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T} \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - P^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu \right), \quad (7.82)$$

3. Prendre la somme pondérée de solutions particulières qui définit le résidu préconditionné non équilibré :

$$\bar{w} = \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

4. Ajuster le résidu préconditionné en résolvant le problème

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - P^T F_{DP} P \bar{w} \right), \quad (7.84)$$

5. Prendre la direction de descente équilibrée

$$z = M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} = \bar{w} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma. \quad (7.85)$$

Introduisons les notations supplémentaires qui nous permettront d'écrire l'algorithme BDD-hybride sous la forme d'un opérateur :

$$z^* = (P^T F_{DP} P)^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu, \quad \tilde{r} = \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - P^T F_{DP} P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu,$$

$$M_{DP} = \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta, \beta \in \mathbb{R}^m \right\}$$

et P_0 la $P^T F_{DP} P$ -projection orthogonale sur W . z^* et le produit scalaire engendré par $P^T F_{DP} P$ sont bien définis dans $\text{Im}(P)$. Nous nous appuyons sur [54] pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 7.4. *L'algorithme 7.1 retourne $z = M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}$, où*

$$M^{-1} = \left((Id - P_0) M_{DP} \left(P^T F_{DP} P \right) (Id - P_0) + P_0 \right) \left(P^T F_{DP} P \right)^{-1} \quad (7.86)$$

Démonstration :

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu, \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \quad \text{par l'équation (7.81)} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu \right), \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \\ &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) z^* - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \\ &= \left\langle z^* - \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle_{P^T F_{DP} P}, \quad \forall \beta. \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus signifie

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu = P_0 z^*. \quad (7.87)$$

Le produit matrice vecteur par $M_{DP}^{(s)}$ se faisant par la résolution d'un problème de Neumann en pression et l'équation (7.82) conduisent à

$$\sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = M_{DP} \tilde{r} + w', \quad w' = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta. \quad (7.88)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \mu \\ &= \left(P^T F_{DP} P \right) z^* - \left(P^T F_{DP} P \right) P_0 z^* \quad \text{par définition de } z^* \text{ et (7.87)} \\ &= \left(P^T F_{DP} P \right) (Id - P_0) z^*. \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma, \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \quad \text{par (7.84)} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T \left(P^T F_{DP} P \right) \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} - \left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right)^T F_{DP} \left(P \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \right) \gamma, \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \\ &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) z^* - \left(P^T F_{DP} P \right) \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \\ &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) z^* - \left(P^T F_{DP} P \right) (M_{DP} \tilde{r} + w') - \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle, \quad \forall \beta \quad \text{par (7.88)} \\ &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) z^* - \left(P^T F_{DP} P \right) M_{DP} \tilde{r} - \left(P^T F_{DP} P \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma + w' \right), \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \beta \right\rangle, \quad \forall \beta. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Cette dernière égalité montre que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma + w' = P_0 (z^* - M_{DP} \tilde{r}). \quad (7.91)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} &= \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{(s)} \\ \bar{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma \quad \text{Par définition du préconditionneur BDD-hybride} \\ &= M_{DP} \tilde{r} + w' + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \gamma \quad \text{Par l'équation (7.88)} \\ &= M_{DP} \tilde{r} + P_0 (z^* - M_{DP} \tilde{r}) \quad \text{par l'égalité (7.91)} \\ &= (Id - P_0) M_{DP} \tilde{r} + P_0 z^* \\ &= (Id - P_0) M_{DP} (P^T F_{DPP}) (Id - P_0) z^* + P_0 z^* \quad \text{par l'équation (7.89)} \\ &= ((Id - P_0) M_{DP} (P^T F_{DPP}) (Id - P_0) + P_0) (P^T F_{DPP})^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix} \quad \text{par définition de } z^*. \end{aligned}$$

L'écriture du préconditionneur BDD sous la forme d'un opérateur est donc

$$M^{-1} = ((Id - P_0) M_{DP} (P^T F_{DPP}) (Id - P_0) + P_0) (P^T F_{DPP})^{-1}.$$

7.6.2 Résultat intermédiaire pour obtenir une borne du nombre de conditionnement

Nous prouvons le théorème suivant en nous appuyant sur [54], [49].

Théorème 7.5. *L'algorithme 7.1 retourne $z = M^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_p \end{pmatrix}$, où M^{-1} est un opérateur symétrique défini positif et $\text{Cond}(M^{-1} P^T F_{DPP}) \leq c$, où*

$$c = \sup \left\{ \frac{\sum_{s=1}^{N_s} \left\| B^{(s)T} P \sum_{r=1}^{N_s} T_D^{(r)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(r)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(r)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(s)}}^2}{\sum_{s=1}^N \left\| \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(s)}}^2} : G_I^T \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} = 0, \right.$$

$$\left. \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \forall \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \in \ker(F_{DP}^{(s)}), \quad 1 \leq s \leq N_s \right\} \quad (7.92)$$

(7.93)

Démonstration :

On prend tous $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix}$ orthogonaux au noyau de l'opérateur FETI et aux constantes locales de pression. Les calculs sont effectués dans $\text{Im}(P)$ où l'opérateur $P^T F_{DPP}$ est in-

versible. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \left\langle M^{-1} (P^T F_{DP} P) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = \\
 & \left\langle ((Id - P_0) M_{DP} (P^T F_{DP} P) (Id - P_0) + P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = \\
 & \left\langle (Id - P_0) M_{DP} (P^T F_{DP} P) (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} + \left\langle P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = \\
 & \left\langle M_{DP} (P^T F_{DP} P) (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} + \left\langle P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, P_0 \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = \\
 & \left\langle (Id - P_0)^T M_{DP} (P^T F_{DP} P) (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} + \left\langle P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, P_0 \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P}. \quad (7.94)
 \end{aligned}$$

Puisque F_{DP} et $M_{DP}^{(s)}$ sont symétriques, l'opérateur M_{DP} est symétrique, et M^{-1} l'est aussi par (7.94). Posons $y = (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}$ et nous avons par définition de P_0 la condition de compatibilité $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}^T (P^T F_{DP} P) y = 0$ qui assure l'existence de l'unique $\begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} &= M_{DP}^{(s)} T_D^{(s)T} (P^T F_{DP} P) y, \quad (7.95) \\
 G_I^T \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} &= 0, \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \forall \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \in \ker (F_{DP}^{(s)}). \Leftrightarrow \\
 F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} &= T_D^{(s)T} (P^T F_{DP} P) y, \\
 G_I^T \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} &= 0, \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \forall \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)} \\ \hat{Q}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \in \ker (F_{DP}^{(s)}). \quad (7.96)
 \end{aligned}$$

Prenons $\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}$ dans (7.94) et calculons

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(r)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(r)} \end{pmatrix} \right\rangle &= \sum_{r=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y, M_{DP}^{(r)} T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y \right\rangle \quad \text{par (7.96)} \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(r)T} (P^T F_{DP}^{(s)} P) y, M_{DP}^{(r)} T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y \right\rangle \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle (P^T F_{DP}^{(s)} P) y, T_D^{(r)} M_{DP}^{(r)} T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y \right\rangle \\
 &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle (P^T F_{DP}^{(s)} P) y, \sum_{r=1}^{N_s} T_D^{(r)} M_{DP}^{(r)} T_D^{(r)T} (P^T F_{DP} P) y \right\rangle \\
 &= \left\langle M_{DP} (P^T F_{DP} P) y, y \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \quad (7.97)
 \end{aligned}$$

Par l'égalité (7.96) nous avons :

$$F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}^{(s)} \end{pmatrix} = T_D^{(s)T} \left(P^T F_{DP} P \right) y. \quad (7.98)$$

Les égalités (7.97) et (7.98) permettent de conclure que

$$\left\langle M_{DP} \left(P^T F_{DP} P \right) y, y \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.99)$$

Notons $G_I = \left(T^{(1)} R_u^{(1)} \dots T^{(N_f)} R_u^{(N_f)} \right)$ où N_f est le nombre de sous-domaines fottants, U l'espace des multiplicateurs de Lagrange et $V = \ker \left(G_I^T \right)$. Le projecteur de la méthode FETI classique est de la forme $P_V = Id - \tilde{Q} G_I (G_I^T \tilde{Q} G_I)^{-1} G_I^T$ et on peut écrire le projecteur de la méthode hybride sous la forme $P = \begin{pmatrix} P_V & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) y, y \right\rangle &= \left\langle F_{DP} P y, P y \right\rangle \\ &= \left\langle F_{DP} P y, P^2 y \right\rangle \\ &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) y, P y \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Ecrivons y sous la forme $y = \begin{pmatrix} y_d \\ y_p \end{pmatrix}$ et calculons

$$\begin{aligned} \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) y, y \right\rangle &= \left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) y, P y \right\rangle \quad \text{par l'égalité (7.100)} \\ &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T} P y, y \right\rangle \\ &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T} P y, P y \right\rangle \\ &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T} P y, \begin{pmatrix} P_V y_d \\ y_p \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (7.101)$$

Or la matrice booléenne $T^T = \left(T^{(1)} \dots T^{(N_f)} \right)^T$ est l'inverse généralisé de la matrice $T_D = \left(D_{\lambda_u}^{(1)} T^{(1)} \dots D_{\lambda_u}^{(N_f)} T^{(N_f)} \right)$ [46] et $Im(P_V) \subset U = Im(T)$ [56].

Nous avons $Im(T) = Im(T_D)$ et par conséquent l'égalité $T_D T^T P_V y_d = P_V y_d$ car $P_V y_d \in Im(T_D)$ [16]. Nous pouvons illustrer cela en utilisant la figure (7.2). Supposons que $P_V y_d =$

$\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{31} \end{pmatrix} \in \ker \left(G_I^T \right)$. Nous avons donc la relation $\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{31} = 0$. En utilisant cette

dernière relation nous avons au niveau du point multiple dans le sous-domaine 1 les égalités suivantes

$$T_D T^T P_V y_d = \frac{1}{3} (\lambda_{12} + \lambda_{13} - \lambda_{21} - \lambda_{23}) = \frac{1}{3} * 3\lambda_{12} = \lambda_{12}.$$

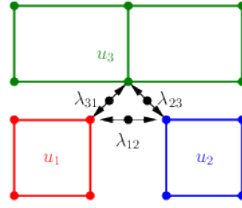


FIGURE 7.2 – Relation d’invariabilité du projecteur dans l’image de l’opérateur booléen signé.

Nous avons aussi par définition de la partition de l’unité formée par la famille de poids $\{D_p^{(s)}\}_{1 \leq s \leq N_s}$ l’égalité $\sum_{s=1}^{N_s} L^{(s)T} D_p^{(s)} L^{(s)} y_p = y_p$. Notons que $T_D T^T P_V y_d = \sum_{s=1}^{N_s} D_{\lambda_u}^{(s)} T^{(s)} T^{(s)T} P_V y_d$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 \langle (P^T F_{DP} P) y, y \rangle &= \sum_{r=1}^{N_s} \left\langle P B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P y, \begin{pmatrix} P_V y_d \\ y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{r=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P y, \begin{pmatrix} T_D T^T P_V y_d \\ \sum_{s=1}^{N_s} L^{(s)T} D_p^{(s)} L^{(s)} y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P y, \begin{pmatrix} D_{\lambda_u}^{(s)} T^{(s)} T^{(s)T} P_V y_d \\ L^{(s)T} D_p^{(s)} L^{(s)} y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle P^T B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P y, T_D^{(s)} \begin{pmatrix} T^{(s)T} P_V y_d \\ L^{(s)} y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(s)T} P^T F_{DP} P y, B^{(s)} \begin{pmatrix} P_V y_d \\ y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(s)T} P^T F_{DP} P y, B^{(s)} P \begin{pmatrix} y_d \\ y_p \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, B^{(s)T} P y \right\rangle \quad \text{par (7.96)} \\
 &\leq \left(\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{N_s} \langle F_{DP}^{(s)} B^{(s)T} P y, B^{(s)T} P y \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{N_s} \langle P^T B^{(s)} F_{DP}^{(s)} B^{(s)T} P y, y \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle P^T F_{DP} P y, y \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.102)
 \end{aligned}$$

par une application de l’inégalité de Hölder. Donc

$$\langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} \leq \left(\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=1}^{N_s} \langle (P^T F_{DP} P) y, y \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en conclut que

$$\langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} \leq \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.103)$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(s)T} (P^T F_{DP} P) y, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{par (7.96)} \\
 &= \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(s)T} P^T \left(\sum_{r=1}^{N_s} B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} \right) P y, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle T_D^{(s)T} (P^T B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P) y, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{s,r=1}^{N_s} \left\langle (P^T B^{(r)} F_{DP}^{(r)} B^{(r)T} P) y, T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \sum_{r=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(r)} (B^{(r)T} P y), B^{(r)T} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &\leq \left(\sum_{r=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(r)} (B^{(r)T} P y), (B^{(r)T} P y) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{r=1}^{N_s} \left\| B^{(r)T} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(r)}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une application de l'inégalité de Hölder. On vient de montrer que

$$\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \leq (\langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P})^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{r=1}^{N_s} \left\| B^{(r)T} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(r)}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La division de cette dernière inégalité par $\left(\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}}$ donne

$$\sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \leq \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} \left(\frac{\sum_{r=1}^{N_s} \left\| B^{(r)T} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(r)}}^2}{\sum_{s=1}^{N_s} \left\| \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(s)}}^2} \right). \quad (7.104)$$

$$\begin{aligned}
 \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} &\leq \sum_{s=1}^{N_s} \left\langle F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{par l'inégalité (7.103)} \\
 &\leq \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} \times \left(\frac{\sum_{r=1}^{N_s} \left\| B^{(r)T} P \sum_{s=1}^{N_s} T_D^{(s)} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(r)}}^2}{\sum_{s=1}^{N_s} \left\| \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(s)} \\ \hat{P}_\Gamma^{(s)} \end{pmatrix} \right\|_{F_{DP}^{(s)}}^2} \right) \quad \text{par (7.104).} \\
 &\quad (7.105)
 \end{aligned}$$

Les équations (7.99) et (7.105) donnent

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} &\leq \left\langle M_{DP} \left(P^T F_{DP} P \right) y, y \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \leq \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} \\ &\quad \times \left(\frac{\sum_{r=1}^N \left\| B^{(r)T} P \sum_{s=1}^N T_D^{(s)} \left(\hat{\lambda}^{(s)} \right) \right\|_{F_{DP}^{(r)}}^2}{\sum_{s=1}^N \left\| \left(\hat{\lambda}^{(s)} \right) \right\|_{F_{DP}^{(s)}}^2} \right). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Rappelons que $y = (Id - P_0) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}$ et nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} &= \langle y, y \rangle_{P^T F_{DP} P} + \left\langle P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \quad \text{Par Pythagore} \\ &\leq \left\langle M_{DP} \left(P^T F_{DP} P \right) y, y \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \\ &\quad + \left\langle P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, P_0 \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \quad \text{par (7.106)} \\ &\leq c \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \quad \text{par (7.106)}. \end{aligned}$$

En prenant $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{Q}_\Gamma \end{pmatrix}$ dans (7.94), l'inégalité ci-dessus donne :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \leq \left\langle M^{-1} \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \leq c \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P}. \quad (7.107)$$

Montrons que le préconditionneur M est défini positif. Supposons que

$$\left\langle M^{-1} \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = 0$$

Nous avons de l'inégalité (7.107)

$$\left\langle M^{-1} \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} \geq \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle_{P^T F_{DP} P} = 0 \implies \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc nous avons

$$\left\langle \left(P^T F_{DP} P \right) M^{-1} \left(P^T F_{DP} P \right) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{P}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.108)$$

La relation (7.108) montre que $\left(P^T F_{DP} P \right) M^{-1} \left(P^T F_{DP} P \right)$ est défini positif. Cela a pour conséquence que M^{-1} est défini positif car $P^T F_{DP} P$ est inversible dans l'espace $Im(P)$ où nous travaillons.

7.7 conclusion

Nous avons combiné FETI et BDD pour résoudre le système linéaire issu de la discrétisation de Stokes avec l'espace de pression constitué d'éléments continus comme les éléments finis mixtes Mini et Hood-Taylor. Le système d'interface obtenu est similaire à celui de la méthode FETI avec un opérateur symétrique semi-défini positif. Nous avons proposé sa résolution par une méthode de gradient conjugué projeté préconditionné. Le préconditionneur est du type BDD avec des préconditionneurs locaux qui sont les inverses des opérateurs intervenant dans l'assemblage de l'opérateur d'interface de la méthode que nous avons introduite. Nous avons prouvé la forme matricielle du préconditionneur et une majoration du nombre de conditionnement qui sont semblables à celles de la méthode BDD.

Chapitre 8

Mise en oeuvre pratique de la méthode hybride

8.1 Introduction

Nous supposons que le domaine Ω sur lequel nous résolvons le problème $Ku = b$ est décomposé en N_s sous-domaines sans recouvrement $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1, N_s}$ d'interface $\Gamma = \cap_{s=1}^{N_s} \overline{\Omega^{(s)}}$. Les inconnues sont séparées en inconnues internes d'indice i et en inconnues situées sur Γ indicées de p et d . Nous appliquerons la méthode du complément de Schur primal aux inconnues d'indice p et la méthode du complément de Schur dual aux inconnues d'indice d . Si les degrés de liberté sont numérotés en commençant par les degrés de liberté internes puis les degrés de liberté interfaces, la matrice du système linéaire global à résoudre s'écrit sous la forme :

$$K = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & K_{id}^{(1)} & K_{ip}^{(1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & K_{id}^{(N_s-1)} & K_{ip}^{(N_s-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(N_s)} & K_{id}^{(N_s)} & K_{ip}^{(N_s)} \\ K_{di}^{(1)} & \cdots & K_{di}^{(N_s-1)} & K_{di}^{(N_s)} & K_{dd} & K_{dp} \\ K_{pi}^{(1)} & \cdots & K_{pi}^{(N_s-1)} & K_{pi}^{(N_s)} & K_{pd} & K_{pp} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Les expressions des opérateurs d'interface et du préconditionneur de la méthode hybride introduites dans le chapitre 7 sont adaptées pour l'analyse théorique et paraissent complexes à implémenter. Nous donnons dans la section 8.2 une expression de l'opérateur d'interface plus adaptée pour la mise en oeuvre. Nous allons montrer dans la section 8.3 la prise en compte d'éventuels modes à énergie nulle. Les calculs de produits matrices-vecteurs, le calcul du résidu et la formation de la matrice grossière feront l'objet de la section 8.4.

8.2 Présentation de la méthode dual-primal

La décomposition du problème initial en N_s sous-problèmes résultant de la décomposition du domaine Ω et de la numérotation précédente des inconnues conduisent aux

matrices locales suivantes dans chaque sous-domaine :

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

avec $K_{dd} = \sum_{s=1}^{N_s} K_{dd}^{(s)}$ et $K_{pp} = \sum_{s=1}^{N_s} K_{pp}^{(s)}$. Nous allons résoudre le système $Ku = b$ par une méthode de sous-domaines en appliquant FETI aux inconnues interfaces identifiées par l'indice d et BDD aux inconnues interfaces identifiées par l'indice p. Les systèmes locaux résultant sont les suivants :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_\Gamma^{(s)T} U_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \lambda + \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \\ b_p^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

$T^{(s)}$ est un opérateur booléen signé d'éléments 0, 1, -1 dont l'application à un vecteur consiste à en extraire et signer les éléments situés aux interfaces. $L_\Gamma^{(s)T}$ est un opérateur booléen d'éléments 0, 1 qui envoie les degrés de liberté situés au bord du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ sur l'interface globale Γ . Nous développons le système (8.3) où la continuité des inconnues duales $U_d^{(s)}$, $s = 1, N_s$ aux interfaces est imposée par le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \lambda + \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

$$\begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} + K_{pp}^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} U_p = b_p^{(s)}, \quad (8.5)$$

$$\sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = 0. \quad (8.6)$$

Éliminons ensuite les inconnues internes et duales $\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix}$ dans l'équation (8.4) en les écrivant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p + \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Nous substituons les expressions ci-dessus dans les équations (8.5) et (8.6) pour avoir respectivement

$$\begin{aligned} & - \left(K_{pp}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} \right) L_\Gamma^{(s)T} U_p \\ & - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \lambda \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} - b_p^{(s)}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda + \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p = \\ - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Posons

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda \\ U_p \end{pmatrix}, \\ F^{(s)} &= \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad F = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} F^{(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix}, \\ H^{(s)} &= - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad H = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} H^{(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix}, \\ S^{(s)} &= K_{pp}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad S = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} S^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} \\ d_1^{(s)} &= - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix}, \quad d_1 = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} d_1^{(s)}, \\ d_2^{(s)} &= - \left(b_p^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \right), \quad d_2 = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} d_2^{(s)}. \end{aligned}$$

Avec la notation ci-dessus, les équations (8.8) et (8.9) deviennent :

$$\sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & L_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{(s)} & H^{(s)T} \\ H^{(s)} & -S^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & L_{\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ U_p \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & L_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(s)} \\ d_2^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Posons

$$F_{DP}^{(s)} = \begin{pmatrix} F^{(s)} & H^{(s)T} \\ H^{(s)} & -S^{(s)} \end{pmatrix}, \quad F_{DP} = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & L_{\Gamma}^{(s)} \end{pmatrix} F_{DP}^{(s)} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & L_{\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

8.3 Prise en compte d'éventuel noyau global

La somme des compléments de Schur associés aux matrices $K^{(s)}$ définies en (8.2) est le complément de Schur de la matrice K introduite en (8.1). Si K est singulière, la trace de son noyau aux interfaces est le noyau du complément de Schur global obtenu par l'assemblage des compléments de Schur locaux.

Le bloc 2×2 de la matrice du système dual-primal (8.10) est l'assemblage de compléments de Schur locaux et s'écrit sous la forme

$$S = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} \left(K_{pp}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} \right) L_{\Gamma}^{(s)T}.$$

Les compléments de Schur ci-dessus assemblés correspondent aux matrices locales

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Il est clair que les matrices $A^{(s)}$ et $K^{(s)}$ définie en (8.2) sont identiques. Ce qui permet de conclure d'après le raisonnement précédent que si la matrice K est singulière, la trace de son noyau aux interfaces est le noyau du complément de Schur assemblé S . On peut donc reconstruire le noyau de S comme dans les équations (6.12) et (6.13). La détermination du noyau de K se fait alors par relèvement du noyau de S comme dans l'égalité (6.5).

8.4 Résolution par gradient conjugué

Nous avons précédemment montré que l'opérateur d'interface issu de la méthode duale-primale appliquée au système de Stokes est symétrique semi-défini positif. On peut donc résoudre le système correspondant en utilisant la méthode du gradient conjugué préconditionné projeté. Cette résolution nécessite de savoir calculer les produits de l'opérateur d'interface avec un vecteur ainsi que l'action du préconditionneur sur le résidu.

8.4.1 Calcul des résidus

Calcul du résidu dual

A chaque itération nous avons les relations (8.7)

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p + \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Nous déduisons des égalités ci-dessus que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda &= \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p \\ &+ \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$F\lambda + H^T U_p - d_1 = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Calcul du résidu primal

1. L'égalité (8.7)

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p + \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix}$$

équivalent à la résolution des problèmes locaux

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} + T^{(s)T} \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p,$$

2. Calculons les produits matrices-vecteurs et la différence suivants

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_\Gamma^{(s)T} U_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} + T^{(s)T} \lambda \\ b_p^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} U_p - H^{(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda + d_2^{(s)} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

avec

$$\begin{aligned} d_2^{(s)} &= - \left(b_p^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^{(s)} \\ b_d^{(s)} \end{pmatrix} \right), \\ H^{(s)} &= - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad s = 1, N_s. \end{aligned}$$

Le résidu primal est donc la troisième ligne de la différence (8.13).

8.4.2 Calcul des produits matrices-vecteurs

Calcul des produits matrices-vecteurs avec l'opérateur d'interface F_{DP}

1. Résoudre les systèmes locaux avec une condition de Neumann sur la vitesse et une condition de Dirichlet sur la pression

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & 0 \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_\Gamma^{(s)T} U_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_\Gamma^{(s)T} U_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \\ 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p. \quad (8.14)$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p. \quad (8.15)$$

2. Prendre les sauts des solutions (8.15) aux interfaces

Des égalités (8.15) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} &= \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} U_p. \end{aligned} \quad (8.16)$$

3. Poser

$$D_1 \Lambda = \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p.$$

4. Calculer les produits matrices-vecteurs

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_{\Gamma}^{(s)T} U_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda \\ S^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p - H^{(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}, \quad (8.17)$$

avec

$$S^{(s)} = K_{pp}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$H^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad s = 1, N_s.$$

5. assembler les membres de droite de (8.17) aux interfaces

$$D_2 \Lambda = - \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} S^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} U_p + \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} H^{(s)} \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} \end{pmatrix} \lambda.$$

6. Nous obtenons

$$F_{DP} \Lambda = \begin{pmatrix} D_1 \Lambda \\ D_2 \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & H^T \\ H & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ U_p \end{pmatrix}.$$

Produit du préconditionneur local par le résidu

L'opérateur F_{DP} du système linéaire (8.10) est un assemblage d'opérateurs locaux qui correspondent à la résolution locale d'un problème de Neumann sur les inconnues duales et un problème de Dirichlet sur les inconnues primales. Les opérateurs inverses de ces opérateurs locaux s'obtiennent en résolvant un problème de Dirichlet sur les degrés de liberté duaux et un problème de Neumann sur les degrés de liberté primaux (7.65). Nous allons approcher, comme dans la méthode FETI et la méthode BDD, l'inverse de la somme d'opérateurs F_{DP} par une somme pondérée des inverses des opérateurs intervenant dans la somme F_{DP} . Résolvons les systèmes suivants avec une condition de Dirichlet sur les vitesses et une condition de Neumann sur les pressions

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & 0 & K_{ip}^{(s)} \\ 0 & I & 0 \\ K_{pi}^{(s)} & 0 & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i^{(s)} \\ T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} \\ z_p^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} \\ -D_p^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} g_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ 0 \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)}.$$

Les premières et dernières lignes des équations ci-dessus s'écrivent

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i^{(s)} \\ z_p^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -D_p^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} \end{pmatrix} g_p - \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)}. \quad (8.18)$$

Nous déduisons de l'égalité (8.18) que

$$\begin{pmatrix} z_i^{(s)} \\ z_p^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} g_p - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)}.$$

On prend comme correction pour l'inconnue interface primale U_p la somme pondérée suivante :

$$\begin{aligned} M_p^{-1} &= \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & L_\Gamma^{(s)} D_p^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i^{(s)} \\ z_p^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & L_\Gamma^{(s)} D_p^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} g_p \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & L_\Gamma^{(s)} D_p^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} \\ &= - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & L_\Gamma^{(s)} D_p^{(s)} \end{pmatrix} M_{NN}^{(s)-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} g_p \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & L_\Gamma^{(s)} D_p^{(s)} \end{pmatrix} E^{(s)} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} \end{aligned} \quad (8.19)$$

avec

$$M_{NN}^{(s)-1} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad E^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Calculons les produits matrices-vecteurs

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i^{(s)} \\ T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} \\ z_p^{(s)} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ F_D^{(s)-1} (T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)}) - E^{(s)T} \begin{pmatrix} 0 \\ D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} g_p \\ -D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} g_p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.20)$$

avec

$$F_D^{(s)-1} = K_{dd}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{di}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{id}^{(s)} \\ K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

On prend comme correction locale au multiplicateur de Lagrange le saut pondéré suivant

$$M_d^{-1} = \sum_{s=1}^{N_s} D_d^{(s)} T^{(s)} F_D^{(s)-1} T^{(s)T} D_d^{(s)} \sum_{k=1}^{N_s} T^{(k)} U_d^{(k)} - \sum_{s=1}^{N_s} D_d^{(s)} T^{(s)} E^{(s)T} \begin{pmatrix} 0 \\ D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} g_p. \quad (8.21)$$

On conclut de (8.19) et (8.21) que le préconditionneur local choisi s'écrit

$$M_{YADP}^{-1} \equiv \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} D_d^{(s)} T^{(s)} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & D_p^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_D^{(s)-1} & -E^{(s)T} \\ -E^{(s)} & -M_{NN}^{(s)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(s)T} D_d^{(s)} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_\Gamma^{(s)T} D_p^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

On ajoutera évidemment les corrections globales aux corrections locales pour rendre la méthode extensible.

8.4.3 Formation de la matrice du problème grossier

Nous allons maintenant montrer la formation pratique de la matrice du système grossier (7.72).

1. Résoudre les systèmes locaux avec la condition de Neumann homogène sur les vitesses et une condition de Dirichlet sur les pressions

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & 0 \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)}. \quad (8.23)$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)}. \quad (8.24)$$

2. Prendre les sauts de (8.24) aux interfaces

$$\sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \end{pmatrix} = - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)}. \quad (8.25)$$

3. Poser

$$D_1 \begin{pmatrix} 0 \\ c^{(s)} \end{pmatrix} = - \sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)}. \quad (8.26)$$

4. Calculer les produits matrices-vecteurs

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} & K_{dp}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(s)} \\ U_d^{(s)} \\ L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

avec

$$S^{(s)} = K_{pp}^{(s)} - \begin{pmatrix} K_{pi}^{(s)} & K_{pd}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, N_s.$$

5. assembler les seconds membres de (8.27) aux interfaces

$$D_2 \begin{pmatrix} 0 \\ c^{(s)} \end{pmatrix} = - \sum_{s=1}^{N_s} L_\Gamma^{(s)} S^{(s)} L_\Gamma^{(s)T} c^{(s)}. \quad (8.28)$$

6. Nous obtenons de (8.26) et (8.28) que

$$F_{DP} \begin{pmatrix} 0 \\ c^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} c^{(s)} \\ -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} S^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque constante locale de pression $c^{(s)}$ du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ les calculs des produits matrices-vecteurs ci-dessus peuvent être restreints aux sous-domaines $\Omega^{(k)}$ qui lui sont voisins.

7. Calculer les produits scalaires suivants

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\sum_{s=1}^{N_s} \begin{pmatrix} 0 & T^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{id}^{(s)} \\ K_{di}^{(s)} & K_{dd}^{(s)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{ip}^{(s)} \\ K_{dp}^{(s)} \end{pmatrix} L_{\Gamma}^{(s)T} c^{(s)} \\ -\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)} S^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)T} c^{(s)} \end{pmatrix} = -c^{(s)T} S c^{(s)}.$$

Ces produits scalaires peuvent être également restreints aux sous-domaines voisins comme pour les produits matrices-vecteurs. La matrice du problème grossier est finalement de la forme $C^T S C$ où la matrice $C = \begin{pmatrix} c^{(1)} & \dots & c^{(N_s)} \end{pmatrix}$ est constituée des constantes locales de pression et S est le complément de Schur global de pression.

8.4.4 Cas des problèmes semi-définis positifs

Nous allons montrer que la singularité de la matrice (8.1) peut entraîner celle de la matrice grossière et qu'il est possible de reconstruire les modes à énergie nulle du problème global de la matrice (8.1) à partir du noyau de la matrice grossière. Supposons que la matrice (8.1) est singulière. Cette singularité peut entraîner la singularité du complément de Schur assemblé S dont nous notons le noyau N . La restriction de N à chaque sous-domaine est contenue dans le noyau local et peut donc se décomposer dans la base contenant le noyau local :

$$L_{\Gamma}^{(s)} N = z_p^{(s)} \theta^{(s)} \quad (8.29)$$

$L_{\Gamma}^{(s)}$ est l'opérateur de restriction à chaque sous-domaine, $z_p^{(s)}$ une base contenant le noyau local et $\theta^{(s)}$ les coefficients de combinaison. Soit $\{D_p^{(s)}\}_{s=1, N_s}$ une famille de poids formant une partition de l'unité :

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D_p^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} = I \quad (8.30)$$

Nous avons par définition du noyau N et de la partition de l'unité (8.30) et l'égalité (8.29)

$$\sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D_p^{(s)} z_p^{(s)} \theta^{(s)} = \sum_{s=1}^{N_s} L_{\Gamma}^{(s)T} D_p^{(s)} L_{\Gamma}^{(s)} N = N. \quad (8.31)$$

Rappelons les matrices $C = \begin{pmatrix} \dots & L_{\Gamma}^{(s)T} D_p^{(s)} z_p^{(s)} & \dots \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} \vdots \\ \theta^{(s)} \\ \vdots \end{pmatrix}$. L'égalité (8.31) de-

vient

$$C\theta = N.$$

En appliquant S à l'égalité ci-dessus, on obtient

$$SC\theta = SN = 0.$$

Nous avons finalement

$$C^T SC\theta = 0. \tag{8.32}$$

Nous venons de montrer que si le problème global possède un noyau alors la matrice grossière est singulière. Son noyau fournit les coefficients de combinaison linéaire dans la base du noyau local afin de reconstruire le noyau du problème global. En outre on sait que si le problème global est bien posé, le problème grossier l'est aussi.

8.5 conclusion

La mise en oeuvre de la méthode hybride se fait en général par la résolution de problèmes locaux avec une condition de Neumann sur certaines inconnues et une condition de Dirichlet sur d'autres. Elle nécessite la différenciation des inconnues entre les inconnues primales et les inconnues duales. Le produit de l'opérateur du système d'interface avec un vecteur se fait en résolvant un problème de Neumann pour les inconnues duales et un problème de Dirichlet sur les inconnues primales. L'application du préconditionneur local quant à elle passe par la résolution de problèmes locaux avec les conditions de Dirichlet sur les inconnues duales et les conditions de Neumann sur les inconnues primales. Cette implémentation n'engendre aucune difficulté supplémentaire en comparaison avec FETI et BDD.

Chapitre 9

Applications numériques

Nous avons appliqué la méthode hybride duale-primale à la résolution du problème de la cavité entraînée. Nous recherchons la vitesse $U = (u, v)$ et la pression p solutions du système de Stokes dans le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ avec un second membre nul et une condition de Dirichlet sur le bord. Nous imposons $(u, v) = (0, 0)$ sur les bords inférieurs et latéraux et $(u, v) = (1, 0)$ sur le bord supérieur. L'élément fini utilisé pour la discrétisation est l'élément P_1 bulle P_1 (Mini). Le maillage est constitué de triangles. La discrétisation de la pression ainsi que celle de la vitesse sont linéaires. L'espace d'approximation de la vitesse est en outre enrichi avec une fonction bulle à l'intérieur de chaque triangle. Cet enrichissement est nécessaire pour assurer la stabilité de l'élément Mini. Les degrés de liberté en pression sont situés aux sommets des triangles. Les vitesses sont approchées aux sommets et à l'intérieur de chaque triangle. Nous avons résolu le système linéaire résultant par une méthode de gradient conjugué projeté avec le critère d'arrêt $\| K \begin{pmatrix} U \\ p \end{pmatrix} - b \| / \| b \| < 10^{-8}$ où K est la matrice de Stokes.

Pour un maillage donné, nous faisons varier le nombre de sous-domaines pour tester l'extensibilité de la méthode. Les premières colonnes des tableaux (9.1), (9.2) et (9.3) correspondent au nombre de sous-domaines dans la direction horizontale et dans la direction verticale respectivement. Les deuxièmes colonnes indiquent le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt choisi. Les découpages en sous-domaines réalisés permettent la coexistence du problème grossier de la méthode FETI et du problème grossier de la méthode BDD. Toutes les matrices du préconditionneur local possèdent un

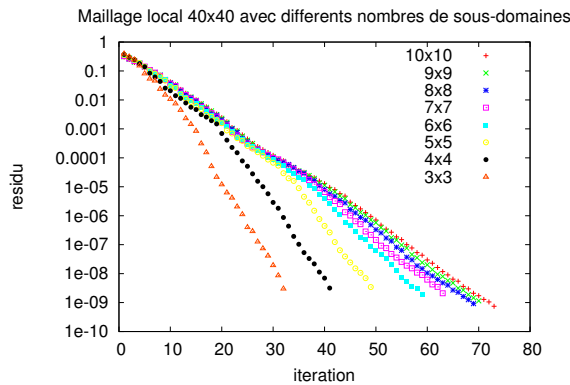


FIGURE 9.1 – Figure :courbe de convergence avec différents nombres de sous-domaines

Nombre de sous-domaines	nombre d'itérations
3×3	28
4×4	34
5×5	39
6×6	43
7×7	46
8×8	48
9×9	49
10×10	50
20×20	53
40×40	55

TABLE 9.1 – Maillage local 10×10 .

Nombre de sous-domaines	nombre d'itérations
3×3	30
4×4	36
5×5	43
6×6	49
7×7	52
8×8	54
9×9	55
10×10	57
20×20	61

TABLE 9.2 – Maillage local 20×20 .

noyau en pression. La dimension de l'espace grossier associé à la méthode BDD est égale au nombre de sous-domaines. Les sous-domaines qui ne touchent pas le bord physique du problème engendrent chacun deux translations dans l'espace grossier associé à FETI. Les deux espaces grossiers sont donc de petite taille et les matrices grossières sont creuses. En fixant le maillage local et en faisant varier le nombre de sous-domaines, nous observons une légère augmentation du nombre d'itérations qui finit par stagner. Nous constatons ainsi le comportement asymptotique de la vitesse de convergence des méthodes de décomposition de domaine extensibles comme FETI et BDD illustré par la figure 9.1. L'asymptote serait autour de 50 itérations pour le maillage local 10×10 . La méthode duale-primale préserve donc l'extensibilité numérique de FETI et BDD en empruntant les projecteurs qui leur sont associés.

Une autre propriété intéressante est la sensibilité de la vitesse de convergence par rapport au raffinement de maillage. Le préconditionneur Neumann-Neumann et le préconditionneur Dirichlet de la méthode BDD et de la méthode FETI sont très peu sensibles au raffinement de maillage. Le préconditionneur local que nous avons introduit pour la méthode duale-primale est analogue au préconditionneur Neumann-Neumann de BDD et au préconditionneur Dirichet de la méthode FETI. Nous nous attendons donc à la robustesse de la méthode duale-primale par rapport au raffinement de maillage. Nous reportons dans le tableau (9.4) les résultats numériques pour un découpage en 20×20 sous-domaines. La

Nombre de sous-domaines	nombre d'itérations
3×3	31
4×4	40
5×5	47
6×6	54
7×7	58
8×8	60
9×9	62
10×10	64
20×20	69

TABLE 9.3 – Maillage local 40×40 .

Maillage local	nombre d'itérations
10×10	53
20×20	61
40×40	69

TABLE 9.4 – Découpage en 20×20 sous-domaines.

première colonne du tableau (9.4) correspond au maillage local et la deuxième colonne donne le nombre d'itérations pour atteindre le critère d'arrêt. Nous constatons une faible dépendance de la vitesse de convergence par rapport au raffinement de maillage. Ces tests numériques montrent que la vitesse de convergence de la méthode duale-primale pour la résolution du système de Stokes est quasi-optimale comme FETI et BDD.

Chapitre 10

Conclusion et perspectives

La méthode FETI et la méthode BDD sont deux méthodes de décomposition de domaine très utilisées en pratique. Leur popularité est due en partie à la possibilité de les mettre en oeuvre de manière purement algébrique et à leurs bonnes propriétés de convergence pour la résolution de problèmes très mal conditionnés. Leur implémentation et leur analyse reposent sur des principes similaires. On dit aussi que FETI et BDD sont des méthodes duales. Elles ont été initialement introduites pour la résolution des systèmes linéaires de grande taille issus de la discrétisation des équations de l'élasticité linéaire. Leur efficacité a suscité des extensions à de nombreux autres problèmes. La méthode FETI et la méthode BDD ont été étendues avec succès au système de Stokes avec un espace discret discontinu en pression. Cette restriction exclut l'application de FETI et BDD à la résolution du système de Stokes discrétisé avec les éléments finis Mini et Hood-Taylor pourtant très importants en ingénierie. La difficulté vient de la présence simultanée de la vitesse et de la pression aux interfaces. Les problèmes d'interface issus de la méthode FETI et de la méthode BDD sont dans ce cas indéfinis, les inconnues étant de plus physiquement hétérogènes. L'idée de cette thèse est de combiner FETI et BDD afin d'obtenir un problème d'interface symétrique défini positif aux inconnues physiquement homogènes, permettant une bonne convergence de la méthode du gradient conjugué. En s'attachant à la méthodologie de FETI et BDD nous avons introduit un multiplicateur de Lagrange aux interfaces pour assurer la continuité faible de la vitesse au travers de l'interface. La pression quant à elle est unique entre les sous-domaines voisins. La mise en oeuvre de cette stratégie se heurte à un problème technique dû à la différence entre les structures d'interface habituellement utilisées en FETI et en BDD. La mise en oeuvre de la combinaison de FETI et BDD où chaque méthode conserverait sa propre définition d'interface aurait été très complexe. Nous avons donc mis en place dans cette thèse un traitement unique des grandeurs d'interface basé sur la définition de l'interface entre les sous-domaines habituellement utilisée en FETI. Il s'agit d'utiliser les notions de masquage pour éviter la redondance des pressions en présence de points appartenant à plus de deux sous-domaines. Dans cette méthodologie, le calcul du produit scalaire de deux vecteurs se fait en ayant l'un des vecteurs assemblés et l'autre non assemblé. La combinaison du masquage et du produit scalaire entre vecteurs assemblés-non-assemblés permet d'utiliser la structure d'interface de la méthode FETI pour la méthode BDD sans craindre le problème de redondance aux points multiples. Nous avons ainsi introduit une méthodologie générale de mise en oeuvre valable pour FETI, BDD et de leur combinaison. Cette technique nous a permis de combiner FETI et BDD pour résoudre le système de Stokes issu de la discrétisation avec les éléments finis Mini. Le traitement unique de l'interface est nécessaire pour une mise en oeuvre aisée de la méthode que nous avons introduite.

Le système de Stokes posé dans un domaine borné s'accompagne de conditions aux limites qui peuvent être de plusieurs natures. Lorsque cette condition aux limites est de type Dirichlet, le problème est globalement mal posé, la pression est déterminée à une constante additive près. Il nous faut donc savoir résoudre les problèmes globalement mal posés. La méthode généralement utilisée en ingénierie consiste à imposer la valeur de la pression en un point donné. Cette technique régularise le système et permet de s'affranchir du problème posé par la présence du noyau global en pression. Un des inconvénients de cette méthode est le mauvais conditionnement du système linéaire résultant. Une autre stratégie consiste à reconstruire explicitement la constante globale de pression et à projeter le système de Stokes singulier dans l'espace des pressions à moyenne nulle. La reconstruction du noyau d'un problème globalement mal posé a déjà été réalisée pour FETI. Nous ne pouvions utiliser directement ce résultat dans notre méthode parce que nous avons choisi de traiter la pression comme dans la méthode BDD. Cela nous a amené à étendre la méthode BDD pour la résolution de problèmes globalement mal posés. La méthode que nous avons construite en combinant FETI et BDD permet donc de traiter à la fois des problèmes globalement mal posés en vitesse ou en pression.

La méthode FETI et la méthode BDD tirent leur efficacité du mécanisme de communication globale qu'elles incorporent naturellement dans leurs algorithmes. Cette communication entre tous les sous-domaines est assurée par des projecteurs construits à partir de noyaux de matrices locales. L'existence de noyaux locaux lors de la résolution de problèmes de Neumann locaux en vitesse engendre un projecteur comme dans la méthode FETI. Le préconditionneur local que nous avons utilisé se construit par une résolution de problèmes de Dirichlet en vitesse et Neumann en pression. Ces problèmes admettent en général un noyau en pression et sont la source d'un deuxième projecteur comme dans la méthode BDD. La présence de ces projecteurs a assuré l'extensibilité de la méthode comme le prouvent les résultats numériques. Nous avons démontré un résultat à partir duquel la borne du nombre de conditionnement pourrait être déterminée. Nous avons en général coexistence de deux projecteurs dont les matrices sont de petite dimension. Ces deux projecteurs présentent la propriété remarquable d'être complètement découplés, ce qui préserve la structure creuse des problèmes grossiers qui interviennent dans les projecteurs. Ce découplage permet en plus d'envisager dans le futur l'enrichissement de l'espace grossier associé au projecteur BDD afin d'accélérer encore d'avantage la vitesse de convergence.

Le système de Stokes est le prototype de problèmes de point-selle qui apparaissent dans plusieurs applications. La formulation mixte du système de l'élasticité linéaire incompressible est très utilisée. Son analyse, sa discrétisation et le système linéaire résultant sont semblables au système de Stokes. Notre méthode s'étend donc naturellement à la résolution de problèmes d'élasticité linéaire incompressible. Les systèmes linéaires issus de la méthode des éléments finis mixtes pour les problèmes de second ordre entrent directement dans la catégorie de systèmes auxquels pourraient s'appliquer aussi notre méthodologie. Une autre source de problèmes de points-selles est la méthode de points-intérieurs qui interviennent en control optimal. Un large éventail d'applications en science et en ingénierie se confrontent à la résolution de problèmes de point-selle comme le système de Stokes. Le caractère algébrique de la méthode que nous avons introduite rend très facile l'extension de son usage pour ces applications. Les résultats numériques montrent l'efficacité de la méthode hybride que l'on peut encore améliorer en s'appuyant sur les progrès réalisés en FETI et BDD [44, 40]. Une direction de recherche serait de confirmer théoriquement l'extensibilité de la méthode hybride en majorant la constante c du théorème 7.5 par une fonction de la taille des sous-domaines H , du maillage h et d'une constante *const* indé-

pendante de tout paramètre. Nous recherchons une borne du nombre de conditionnement identique à celle de FETI et BDD qui s'obtiendrait par une estimation de la forme :

$$c \leq \text{const} \left(1 + \ln \left(\frac{H}{h} \right) \right)^2 \quad (10.1)$$

Bibliographie

- [1] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4) :337–344 (1985), 1984.
- [2] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179–192, 1972/73.
- [3] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, paperback edition, 1999.
- [4] M. Benzi, G. H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numer.*, 14 :1–137, 2005.
- [5] M. Bercovier and O. Pironneau. Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables. *Numer. Math.*, 33(2) :211–224, 1979.
- [6] P. Bochev and R. Lehoucq. Energy principles and finite element methods for pure traction linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Math.*, 11(2) :173–191, 2011.
- [7] P. Bochev and R. B. Lehoucq. On the finite element solution of the pure Neumann problem. *SIAM Rev.*, 47(1) :50–66, 2005.
- [8] D. Boffi. Stability of higher order triangular Hood-Taylor methods for the stationary Stokes equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4(2) :223–235, 1994.
- [9] D. Boffi. Minimal stabilizations of the $P_k + 1 - P_k$ approximation of the stationary Stokes equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5(2) :213–224, 1995.
- [10] D. Boffi. Three-dimensional finite element methods for the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(2) :664–670, 1997.
- [11] D. Boffi, F. Brezzi, L. F. Demkowicz, R. G. Durán, R. S. Falk, and M. Fortin. *Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications*, volume 1939 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, June 26–July 1, 2006, Edited by Boffi and Lucia Gastaldi.
- [12] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [13] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 8(R-2) :129–151, 1974.
- [14] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [15] C. Calgaro and J. Laminie. On the domain decomposition method for the generalized Stokes problem with continuous pressure. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 16(1) :84–106, 2000.

- [16] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Jr. *Generalized inverses of linear transformations*. Dover Publications Inc., New York, 1991. Corrected reprint of the 1979 original.
- [17] J.-M. Cros. *Résolution de problèmes aux valeurs propres en calcul des structures par utilisation du calcul parallèle*. PhD thesis, Ecole normale supérieures de Cachan, 1997.
- [18] J.-M. Cros and F. Léné. Parallel iterative methods to solve large-scale eigenvalue problems in structural dynamics. In P. E. Bjørstad, M. Espedal, and D. Keyes, editors, *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, pages 318–324. John Wiley & Sons, 1997. Proceedings from the Ninth International Conference, June 1996, Bergen, Norway.
- [19] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 7(R-3) :33–75, 1973.
- [20] Y.-H. De Roeck and P. Le Tallec. Analysis and test of a local domain-decomposition preconditioner. In *Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Moscow, 1990)*, pages 112–128. SIAM, Philadelphia, PA, 1991.
- [21] C. R. Dohrmann. A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(1) :246–258 (electronic), 2003.
- [22] M. Dryja and O. B. Widlund. Some domain decomposition algorithms for elliptic problems. In *Iterative methods for large linear systems (Austin, TX, 1988)*, pages 273–291. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [23] C. Farhat, P.-S. Chen, J. Mandel, and F. X. Roux. The two-level FETI method. II. Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155(1-2) :153–179, 1998.
- [24] C. Farhat, Jan, and F.-X. Roux. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 115(3-4) :365–385, 1994.
- [25] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP : a dual-primal unified FETI method. I. A faster alternative to the two-level FETI method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 50(7) :1523–1544, 2001.
- [26] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP : a dual-primal unified FETI method. I. A faster alternative to the two-level FETI method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 50(7) :1523–1544, 2001.
- [27] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7(7-8) :687–714, 2000.
- [28] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7(7-8) :687–714, 2000. Preconditioning techniques for large sparse matrix problems in industrial applications (Minneapolis, MN, 1999).
- [29] C. Farhat, A. Macedo, M. Lesoinne, F.-X. Roux, F. Magoules, and de la Bourdonnaie. Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184(2-4) :213–239, 2000.
- [30] C. Farhat and J. Mandel. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems. I. An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155(1-2) :129–151, 1998.

- [31] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [32] C. Farhat and F.-X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. In J. T. Oden, editor, *Computational Mechanics Advances*, volume 2 (1), pages 1–124. North-Holland, 1994.
- [33] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 1999.
- [34] Y. Fragakis and M. Papadrakakis. The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics : Formulation, interrelation and numerical efficiency of primal and dual methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3799–3830, 2003.
- [35] M. J. Gander. Schwarz methods over the course of time. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 31 :228–255, 2008.
- [36] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations—Theory and algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [37] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition, 1996.
- [38] P. Gosselet. *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003.
- [39] P. Gosselet and C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Arch. Comput. Methods Engrg.*, 13(4) :515–572, 2006.
- [40] M. Jarošová, A. Klawonn, and O. Rheinbach. Projector preconditioning and transformation of basis in FETI-DP algorithms for contact problems. *Math. Comput. Simulation*, 82(10) :1894–1907, 2012.
- [41] H. H. Kim and C.-O. Lee. A FETI-DP formulation for the three-dimensional Stokes problem without primal pressure unknowns. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32(6) :3301–3322, 2010.
- [42] H. H. Kim and C.-O. Lee. A two-level nonoverlapping Schwarz algorithm for the Stokes problem : numerical study. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 223/224 :153–160, 2012.
- [43] H. H. Kim, C.-O. Lee, and E.-H. Park. A FETI-DP formulation for the Stokes problem without primal pressure components. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(6) :4142–4162, 2010.
- [44] A. Klawonn and O. Rheinbach. Deflation, projector preconditioning, and balancing in iterative substructuring methods : connections and new results. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(1) :A459–A484, 2012.
- [45] A. Klawonn and O. B. Widlund. FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : connections and new results. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(1) :57–90, 2001.
- [46] A. Klawonn and O. B. Widlund. FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : connections and new results. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(1) :57–90, 2001.

- [47] A. Klawonn, O. B. Widlund, and M. Dryja. Dual-primal FETI methods for three-dimensional elliptic problems with heterogeneous coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1) :159–179 (electronic), 2002.
- [48] A. Klawonn, O. B. Widlund, and M. Dryja. Dual-primal FETI methods for three-dimensional elliptic problems with heterogeneous coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1) :159–179 (electronic), 2002.
- [49] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 1(2) :121–220, 1994.
- [50] Y.-J. Lee, J. Wu, J. Xu, and L. Zikatanov. A sharp convergence estimate for the method of subspace corrections for singular systems of equations. *Math. Comp.*, 77(262) :831–850, 2008.
- [51] J. Li. A dual-primal FETI method for incompressible Stokes equations. *Numer. Math.*, 102(2) :257–275, 2005.
- [52] J. Li and X. Tu. A nonoverlapping domain decomposition method for incompressible Stokes equations with continuous pressures. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(2) :1235–1253, 2013.
- [53] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989)*, pages 202–223. SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [54] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 9(3) :233–241, 1993.
- [55] J. Mandel and M. Brezina. Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Math. Comp.*, 65(216) :1387–1401, 1996.
- [56] J. Mandel, C. R. Dohrmann, and R. Tezaur. An algebraic theory for primal and dual substructuring methods by constraints. *Appl. Numer. Math.*, 54(2) :167–193, 2005.
- [57] J. Mandel and B. Sousedík. Coarse spaces over the ages. In *Domain decomposition methods in science and engineering XIX*, volume 78 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 213–220. Springer, Heidelberg, 2011.
- [58] J. Mandel and R. Tezaur. On the convergence of a dual-primal substructuring method. *Numer. Math.*, 88(3) :543–558, 2001.
- [59] T. P. A. Mathew. *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*, volume 61 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [60] L. F. Pavarino and O. B. Widlund. Balancing Neumann-Neumann methods for incompressible Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55(3) :302–335, 2002.
- [61] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [62] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [63] C. Rixen, D. J. and Farhat, R. Tezaur, and J. Mandel. Theoretical comparison of the feti and algebraically partitioned feti methods, and performance comparisons with a direct sparse solver. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46 :501â533, 1999.

- [64] D. Rixen. *Substructuring and Dual Methods in Structural Analysis*. PhD thesis, Université de Liège, 1997.
- [65] D. J. Rixen. Dual Schur complement method for semi-definite problems. In *Domain decomposition methods, 10 (Boulder, CO, 1997)*, volume 218 of *Contemp. Math.*, pages 341–348. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [66] D. J. Rixen and C. Farhat. A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 44(4) :489–516, 1999.
- [67] H. A. Schwarz. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15 :272–286, May 1870.
- [68] B. F. Smith, P. E. Bjørstad, and W. D. Gropp. *Domain decomposition—Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [69] B. Sousedík and J. Mandel. On the equivalence of primal and dual substructuring preconditioners. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 31 :384–402, 2008.
- [70] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Internat. J. Comput. & Fluids*, 1(1) :73–100, 1973.
- [71] A. Toselli and O. Widlund. *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, volume 34 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [72] A. Toulougoussou and F.-X. Roux. Balancing domain decomposition method for semi-definite problems. In *Domain decomposition methods, 22 (Lugano, Switzerland, 2013)*.
- [73] A. Toulougoussou and F.-X. Roux. Hybrid dual-primal feti-schur complement method for stokes. In *Domain decomposition methods, 21 (Rennes-Bretagne-Atlantique, France, 2012)*.
- [74] U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, and A. Schüller. *Multigrid*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 2001. With contributions by A. Brandt, P. Oswald and K. Stüben.
- [75] X. Tu and J. Li. A unified dual-primal finite element tearing and interconnecting approach for incompressible Stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 94(2) :128–149, 2013.
- [76] R. Verfürth. A combined conjugate gradient-multigrid algorithm for the numerical solution of the Stokes problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 4(4) :441–455, 1984.
- [77] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 18(2) :175–182, 1984.
- [78] O. B. Widlund. The development of coarse spaces for domain decomposition algorithms. In *Domain decomposition methods in science and engineering XVIII*, volume 70 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 241–248. Springer, Berlin, 2009.
- [79] A. Zsaki, D. Rixen, and Paraschivoiu. A substructure-based iterative inner solver coupled with uzawa’s algorithm for the stokes problem. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 43 :215–230., 2003.

Résumé

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode de décomposition de domaine pour la résolution du système de Stokes discrétisé avec les éléments finis mixtes stables où la pression est continue comme Hood-Taylor et Mini. La nouvelle méthode résulte de la combinaison de FETI qui est appliquée à la vitesse et de BDD qui est appliquée à la pression sans découpler les inconnues. Elle hérite et découple les projecteurs grossiers associés à FETI et à BDD. La méthodologie débouche sur un système linéaire symétrique, semi-défini positif que nous avons résolu par la méthode du gradient conjugué projeté préconditionné. La méthode contient deux préconditionneurs grossiers creux et des préconditionneurs locaux exacts qui assurent son extensibilité, sa robustesse et son efficacité. L'introduction de projecteurs locaux construits à partir des modes de pression des sous-domaines étend la méthode aux éléments finis mixtes discontinues en pression et rend le problème grossier de BDD facultatif même en présence de la pression aux interfaces. Nous avons aisément appliqué la méthode à l'élasticité incompressible et quasi-incompressible et elle peut s'étendre de la même façon au cadre plus général des systèmes de point-selle issus des problèmes de minimisation sous contraintes grâce à sa nature algébrique.

Mots-clefs

FETI, BDD, dual-primal, Stokes, élasticité incompressible, point-selle, minimisation, contraintes.

Substructuring methods for Stokes

Abstract

The purpose of this thesis is to develop a domain decomposition method suitable to solve the Stokes system discretized with stable mixed finite elements where pressure is continuous such as Hood-Taylor and Mini. The new method arises from the combination of FETI applied to the velocity and BDD applied to the pressure without decoupling the unknowns. It inherits and decouples the coarse projectors included in FETI and BDD. The methodology leads to a symmetric, positive semi-definite linear system that we solve by projected preconditioned conjugate gradient. The method contains two sparse coarse preconditioners and exact local preconditioners that ensure its scalability, its robustness and its efficiency. We use local projectors constructed from the constant pressure modes

of the subdomains that enable an extension to mixed finite elements with discontinuous pressure and that make the coarse problem of BDD optional even in the presence of pressure on the interfaces. We have easily applied the method to incompressible and almost incompressible elasticity and it can be extended the same way to other saddle-point systems arising from minimization problems under constraints due to its algebraic property.

Keywords

FETI, BDD, dual-primal, Stokes, incompressible elasticity, saddle-point, minimization, constraints.